Exercice 1

Soient A(4;-2;6) un point de l'espace et (d) une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=3+4t \\ y=2-2t \\ z=6t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

En justifiant vos réponses, indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. A est un point de (d).
2. $\vec{u}(2;-1;3)$ est un vecteur directeur de (d).
3. La droite (d) coupe le plan $(O;\vec{i},\vec{k})$ en B(-3;2;0).
4. Une représentation paramétrique de la droite (d') passant par A et parallèle à (d) est $\begin{cases} x=4k \\ y=-2k \\ z=6k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

Exercice 2

ABCD est un tétraèdre.
On définit les points E, F et G par les égalités $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}\,;\,\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

1. a) Que peut-on dire du point E ?
   b) A quel plan appartient le point F ? Justifier.
   c) A quel plan appartient le point G? Justifier.

2. a) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.
   c) En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{EF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

3. a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.
   b) En déduire que les points E, F et G sont alignés.

Exercice 3

On considère les vecteurs $\vec{u}(1;-1;3),\vec{v}(2;7;-5),\vec{w}(1;17;-17)$ et $\vec{t}(7;-7;19)$.

1. $(\vec{u},\vec{t})$ forme-t-elle une base d'un plan ? Juistifier.
2. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme une base de l'espace.

Bonus : Déterminer les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 1

1. $A\in(d)\Leftrightarrow\begin{cases}3+4t=4\\2-2t=-2\\6t=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{4-3}{4}=\dfrac{1}{4}\\t=\dfrac{2+2}{2}=2\\t=\dfrac{6}{6}=1\end{cases}$. Or, $\dfrac{1}{4}\neq 2$ ddonc $A\notin(d)$.

   Conclusion : la proposition 1 est fausse.

2. $\vec{v}(4;-2;6)$ est un vecteur directeur de (d). Or, $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d).

   Conclusion : la proposition 2 est vraie.

3. $y_B\neq 0$ donc $B\notin(O;\vec{i},\vec{k})$.

   Conclusion : la proposition 3 est fausse.

4. $\vec{v}(4;-2;6)$ est un vecteur directeur de (d) et (d') donc (d) et (d') sont parallèles.

   De plus, pour $k=1$, on a $\begin{cases}x=4\times1=4\\y=-2\times1=-2\\z=6\times1=6\end{cases}$ donc A(4;-2;6) appartient à (d').

   Conclusion : la proposition 4 est vraie.

Exercice 2

ABCD est un tétraèdre.

On définit les points E, F et G par les égalités $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}\,;\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

1. a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$ donc E est le milieu de [AD].
   b) $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AF},\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires donc les points A, B, C et F sont coplanaires donc le point F appartient au plan (ABC).
   c) $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires donc les points B, C, D et G sont coplanaires donc le point G appartient au plan (BCD).

2. a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})=\vec{0}$ donc $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
   b) $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AF}-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})-(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF})=\vec{0}$ donc $-\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}$ donc $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
   c) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

3. a) $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$ donc $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG})+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG})+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG})=\vec{0}$ *d'après la relation de Chasles*
   $3\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$ donc $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ .Or, $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

On déduit que $\overrightarrow{EF}=3\overrightarrow{EG}$ donc E, F et G sont alignés.

Exercice 3

On considère les vecteurs $\vec{u}(1;-1;3), \vec{v}(2;7;-5), \vec{w}(1;17;-17)$ et $\vec{t}(7;-7;19)$.

1. $\vec{u}(1;-1;3)$ et $\vec{t}(7;-7;19)$. Or, $\frac{7}{1}=7, \frac{-7}{-1}=7$ et $\frac{19}{3}\neq\frac{21}{3}=7$ donc $\vec{u}$ et $\vec{t}$ ne sont pas colinéaires donc $(\vec{u},\vec{t})$ forme une base d'un plan.

2. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$.

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+c=0\,(L_1)\\-a+7b+17c=0\,(L_2)\\3a-5b-17c=0\,(L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+c=0\,(L_1)\\9b+18c=0\,(L_1)+(L_2)\\2a+2b=0\,(L_2)+(L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+c=0\\c=-\frac{1}{2}b\\a=-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b+2b-\frac{1}{2}b=0\\c=-\frac{1}{2}b\\a=-b\end{cases}$$

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}b=0\\c=-\frac{1}{2}b\\a=-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\c=0\\a=0\end{cases}$$

Conclusion : $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme une base de l'espace.

<u>**Bonus**</u> : On cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{t}$.

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{t}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+c=7\,(L_1)\\-a+7b+17c=-7\,(L_2)\\3a-5b-17c=19\,(L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+c=7\,(L_1)\\9b+18c=0\,(L_1)+(L_2)\\2a+2b=12\,(L_2)+(L_3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-b+6)+2b-\frac{1}{2}b=7\\c=-\frac{1}{2}b\\a=-b+6\end{cases}$$

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{t}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}b=1\\c=-\frac{1}{2}b\\a=-b+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\c=-\frac{1}{2}\times2\\a=-2+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\c=-1\\a=4\end{cases}$$

Conclusion : $\vec{t}=4\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$.