Chapitre 7 : Continuité et convexité

I. Continuité d'une fonction

1. Continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle

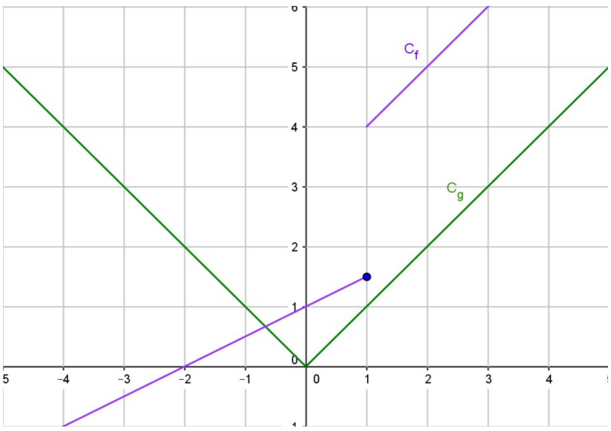
Définition : Une fonction f définie sur un intervalle I contenant le réel a est dite continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Définition : Une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Remarque : La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon

Exemple : ci-dessous, la fonction g est continue alors que la fonction f ne l'est pas. On peut tracer C_g sans lever le crayon mais pas C_f

Remarque : Dans un tableau de variation, on admettra que les flèches indiquent à la fois la stricte monotonie de la fonction et sa continuité.



2. Continuité des fonctions usuelles

Propriétés :

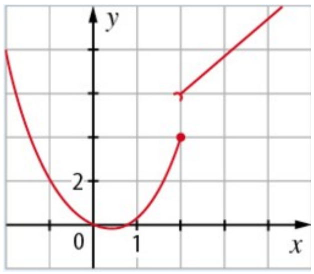
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition
- La fonction $x \to |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$
- La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$

Propriétés (admises) : Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle I.

- Les fonctions $u+v\,;u\times v$ et $u^n(n\in\mathbb{N}^*)$ sont continues sur I
- Les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies

Propriété (admise) : Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Exercice 1 : On considère la fonction définie sur [-2;4] dont la courbe est donnée ci-contre. f est-elle continue en 2 ? en -1 ?



Exercice 2 :

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=1-x & si\, x<2 \\ f(x)=2x-5 & si\, 2\leqslant x<3 \\ f(x)=x & si\, x\geqslant 3 \end{cases}$

1. Construire C_f puis émettre une conjecture sur sa continuité.
2. Démontrer cette conjecture.

II. Image d'une suite par une fonction

Propriétés (admises) :

(1) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in I$.
Si (u_n) converge vers $L\in I$ et si f est continue en L alors $(f(u_n))$ converge vers $f(L)$.

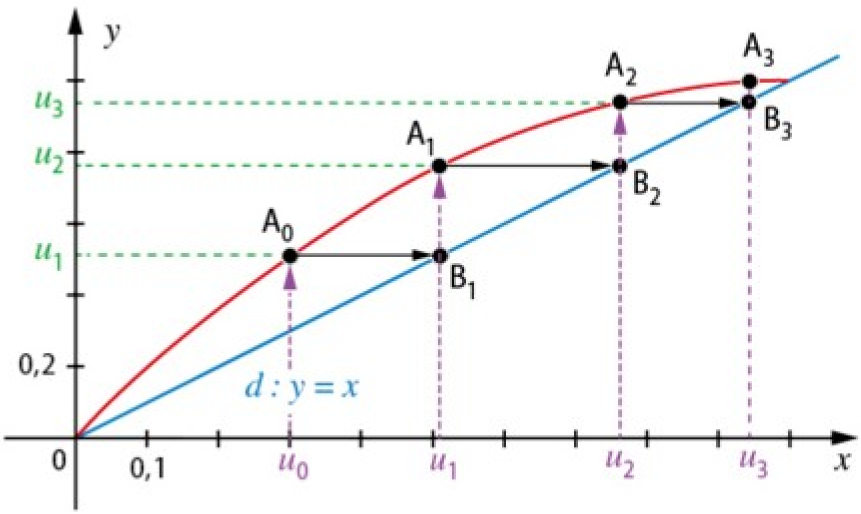
(2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite telle que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$. Si (u_n) converge vers L alors $f(L)=L$.

Construction des premiers termes d'une suite (u_n) telle que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.
Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ dont la courbe C_f est donnée.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
On utilise la courbe C_f et la droite (d) d'équation $y=x$ pour construire les premiers termes de la suite (u_n) . Pour cela :

- on place u_0 sur l'axe des abscisses.
- on place le point $A_0(u_0;f(u_0))=A_0(u_0;u_1)$ sur C_f .
- A l'aide de (d) , on place u_1 sur l'axe des abscisses comme antécédent.

- On construit $A_1(u_1;f(u_1))=A_1(u_1;u_2)$ sur C_f .
- A l'aide de (d) , on place u_2 sur l'axe des abscisses comme antécédent.
- On réitère le raisonnement.

Voir la figure ci-dessous :

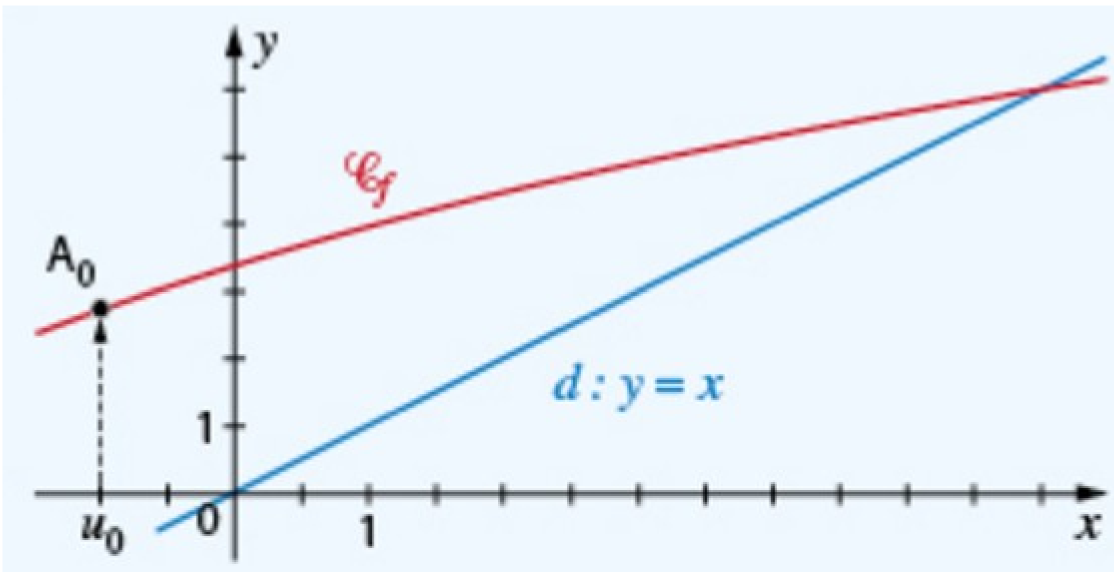


Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=-1$ et $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+3}$.

On considère la fonction f définie sur $[-3;+\infty[$ par $f(x)=2\sqrt{x+3}$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>-3$. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.
2. A l'aide des courbes ci-dessous, construire u_1, u_2 et u_3 .

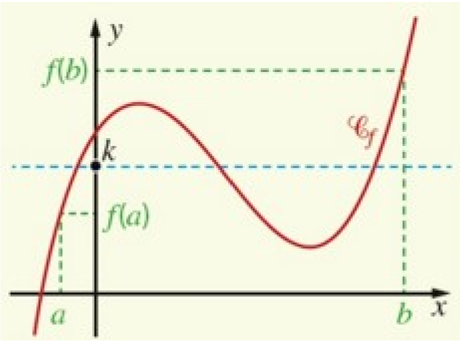


3. Étudier les variations de f sur $[-3;+\infty[$.
4. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6
5. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Théorème des valeurs intermédiaires

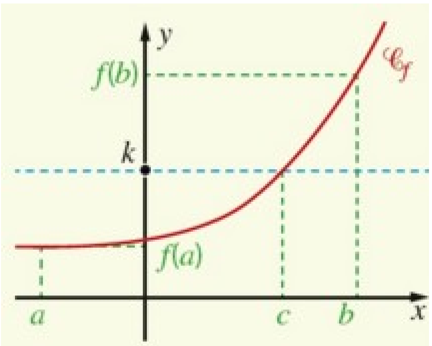
Théorème des valeurs intermédiaires : Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle [a ; b] alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c tel que $f(c)=k$ en d'autres termes, l'équation $f(x)=k$ a au moins une solution dans [a ; b].



Remarque : l'hypothèse « f est continue sur [a;b]» est fondamentale pour ce théorème.

Point Histoire : c'est en 1821 que Auguste-Louis Cauchy (1789-1857) énonce le théorème des valeurs intermédiaires puis en donne une démonstration.

Corollaire : Si une fonction f est définie, continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b] alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c tel que $f(c)=k$ en d'autres termes, l'équation $f(x)=k$ a une et une seule solution dans [a ; b].



Preuve :

Existence : f est continue sur [a;b] donc l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution c dans [a;b] d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Unicité : supposons que l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions distinctes c_1 et c_2 dans [a;b].
On a donc $f(c_1)=f(c_2)=k$.

Or f est strictement monotone sur [a;b] donc $c_1 \neq c_2 \Rightarrow a \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b$ ou $a \leqslant c_2 < c_1 \leqslant b$.
Supposons f strictement croissante sur [a;b] alors $f(a) \leqslant f(c_2) < f(c_1) \leqslant f(b)$ ou $f(a) \leqslant f(c_2) < f(c_1) \leqslant f(b)$ donc $f(c_1) \neq f(c_2)$ d'où une contradiction avec $f(c_1) = f(c_2)$ donc $c_1 = c_2$ donc l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution dans [a;b].

En raisonnant de manière analogue avec f est strictement décroissante sur [a;b] , on obtient la même conclusion.

Conclusion : l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution dans [a;b]. #

<u>Cas particulier : dans le cas où $k = 0$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires</u>
si f est continue, strictement monotone sur [a;b] et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle]a;b[.

Remarques :

- *Le corollaire s'applique aussi pour les intervalles $]a;b]$ ou $[a;b[$ ou $]a;b[$.*
- *On remplace alors le calcul de $f(a)$ et $f(b)$ par les limites $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$.*
- *Ce corollaire permet d'affirmer l'existence d'une unique solution à une équation que l'on ne sait pas résoudre par le calcul.*
- *On cherche alors une valeur approchée de cette solution par l'une des deux méthodes suivantes :*

- **Méthode d'encadrement d'une solution par balayage**

A la calculatrice, on construit un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir de $x = a$ avec un pas de 1.
On peut en déduire l'appartenance de la solution à un intervalle d'amplitude 1.
On note $[p; p+1]$ cet intervalle.
On construit un tableau de valeurs de $f(x)$ à partir de $x = p$ avec un pas de 0,1 et on réitère le procédé en diminuant le pas à chaque étape jusqu 'à obtenir la précision souhaitée.

Exercice 4 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x + 2$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans [-3;-2].
2. Justifier que f est strictement croissante sur [-3;-2].
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans [-3;-2].
4. A l'aide de la méthode par balayage, donner un encadrement de c à 0,01 près.

- **Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie**

Pour appliquer le principe par dichotomie, la fonction f doit être continue, strictement monotone sur [a;b] et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
Le principe par dichotomie sert à encadrer la solution de l'équation $f(x) = 0$.
Si l'on souhaite encadrer une solution de l'équation $f(x) = k$, il faut appliquer le principe à la fonction g définie par $g(x) = f(x) - k$.
On détermine successivement l'intervalle dans lequel se situe la solution en divisant par 2, à chaque étape, l'amplitude de l'intervalle.
Ainsi, on calcule le centre m de l'intervalle [a;b] et on teste si la solution est dans l'intervalle [a;m] ou [m;b].

Exemple : encadrer l'unique solution de l'équation $x^3-5x+2=0$ par la méthode par dichotomie.

Algorithme Général	Programme Python appliqué à l'exemple

Saisir a,b,e
Tant que b-a ≥ e
m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Si $f(a)\times f(m)\leqslant 0$
alors b prend la valeur m
sinon a prend la valeur m
Fin Si
Fin Tant que
Afficher a et b
	`from math import*`
	
	`def f(x) :`
	`    y=x**3-5*x+2`
	`    return(y)`
	
	`def dichotomie(a,b,e) :`
	`    while (b-a) >= e :`
	`        m=(a+b)/2`
	`        if f(a)*f(b)<0 :`
	`            b=m`
	`        else :`
	`            a=m`
	`    return(a,b)`

Exercice 5 :
On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^3-3x+1$.

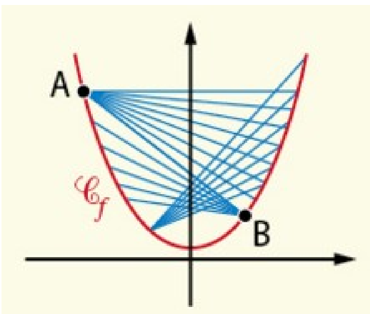
1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution dans $[0;1]$.
2. Justifier que f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]1;+\infty[$.
4. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,01 près.
5. Par balayage, donner un encadrement de α à 0,1 près.
6. Par l'algorithme par dichotomie, retrouver cet encadrement de α à 0,1 près.

IV. Convexité d'une fonction

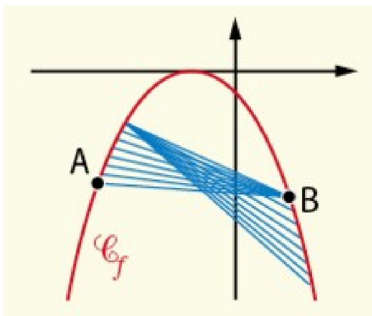
1. Fonction convexe

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe .

(1) On dit que la courbe C_f est convexe sur I lorsque C_f est située « au-dessous » de tous segments [AB] avec A et B sur C_f .



(2) On dit que la courbe C_f est concave sur I lorsque C_f est située « au-dessus » de tous segments [AB] avec A et B sur C_f .

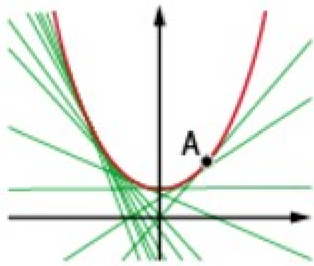


Remarque : pour une fonction convexe, on dit que la courbe est située au-dessous de ses sécantes.

2. Convexité des fonctions deux fois dérivables

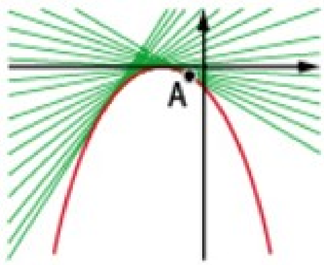
Propriétés (admises) : Soit f une fonction définie, deux fois dérivables sur un intervalle I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I
- f' est croissante sur I
- f'' est positive sur I
- C_f est située au-dessus de chacune de ses tangentes



Propriétés (admises) : Soit f une fonction définie, deux fois dérivables sur un intervalle I.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est concave sur I
- f' est décroissante sur I
- f'' est négative sur I
- C_f est située au-dessous de chacune de ses tangentes



Preuve exigible au programme :
« Si f'' est positive sur I alors C_f est au dessus de chacune de ses tangentes ».

Soit f une fonction définie, deux fois dérivable sur un intervalle I, telle que f'' est positive sur I.
Soit a un réel de I. Une équation de T_a est $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Soit g la fonction définie sur I par $g(x)=f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))$.
g est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a $g'(x)=f'(x)-f'(a)$.
Comme f'' est positive sur I alors f' est croissante sur I donc :

- *si $x=a$ alors $f'(x)=f'(a)$ donc $g'(a)=0$*
- *si $x\leqslant a$ alors $f'(x)\leqslant f'(a)$ donc $g('(x)\leqslant 0)$*
- *si $x\geqslant a$ alors $f'(x)\geqslant f'(a)$ donc $g'(x)\geqslant 0$*

donc g' s'annule en changeant de signe en $x=a$ donc g admet un extremum en $x=a$.
Cet extremum est ici un minimum qui vaut $g(a)$.

On déduit que pour tout réel x de I, $g(x)\geqslant g(a)=0$ donc C_f est bien au-dessus de T_a .
Cela étant vrai pour tout réel $a\in I$, on déduit que C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes sur I. #

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On dit qu'un point A de C_f est un point d'inflexion lorsque, en ce point, la courbe C_f traverse sa tangente.

Propriétés (admises) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

(i) Le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion de C_f si et seulement si la convexité de f change en C_f .
(ii) Si de plus, C_f est deux fois dérivables sur I alors le point $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en a .

Remarque : la condition « si f'' s'annule en a » n'est pas suffisante.
Il faut aussi que f'' change de signe en a pour qu'il y ait un point d'inflexion.

Exercice 6 :
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer, par lecture graphique, les intervalles sur lesquels la fonction est convexe, concave.

Graphique 1 – courbe C_f	Graphique 2 – courbe $C_{f'}$