Exercice n° 56 p 215

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = e^{4x+7} + x^3 - 10$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4e^{4x+7} + 3x^2$
Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{4x+7} > 0$ et $x^2 \geq 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) On a :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{4x+7} + x^3 - 10 = -\infty$ comme somme de limites

avec $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 4x+7 = -\infty \text{ et } \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to -\infty} e^{4x+7} = 0 \text{ par composition de limites} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 10 = -\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ comme somme de limites

avec $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 4x+7 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} e^{4x+7} = +\infty \text{ par composition de limites} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 10 = +\infty \end{cases}$

On déduit que :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui contient 0. On déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

3) A la calculatrice, on a $-1,14 \leq \alpha \leq -1,13$

Exercice n° 88 p218

$C_T(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 5000$ pour $x \in [0; 70]$.

$C_m(x) = C_T(x+1) - C_T(x)$

Partie A - Étude du coût total

1) $C(0) = 5000$ représente les coûts fixes.

2) Soit $x \in [0; 70]$. On a :

$C_m(x) = C_T(x+1) - C_T(x)$

$C_m(x) = \left[(x+1)^3 - 60(x+1)^2 + 1500(x+1) + 5000\right] - \left[x^3 - 60x^2 + 1500x + 5000\right]$

$C_m(x) = \left[\cancel{x^3} + 3x^2 + 3x + 1 - \cancel{60x^2} - 120x - 60 + \cancel{1500x} + 1500 + \cancel{5000}\right] - \left[\cancel{x^3} - \cancel{60x^2} + \cancel{1500x} + \cancel{5000}\right]$

$C_m(x) = 3x^2 - 117x + 1441$

3) C_T est concave sur $[0; 20]$, convexe sur $[20; 70]$

Partie B - Étude du coût marginal

1) $C_m'(x) = 6x - 117$

$\frac{117}{6} = 19,5$

$C_m(19,5) = 300,25$

2)

x	0		$\frac{117}{6}$		70
$C_m'(x)$		$-$	0	$+$	
C_m	1441	$\searrow$	$300,25$	$\nearrow$	7951

3) $C'(x)$ est une approximation de $C_m(x)$.

donc $C''_T(x)$ est une approximation de $C'_m(x)$.

Or $C'_m(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 19,5$

donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion en $x = 19,5$.

4) a) C_m est décroissante sur $[0; 19,5]$ puis croissante sur $[19,5; 20]$

donc chaque objet est plus coûteux à produire que le précédent à partir de 19,5 c'est à dire à partir de 20 objets.

b) A partir de 20 objets, le coût marginal augmente ~~donc~~ c'est à dire que produire un objet supplémentaire va coûter de plus en plus cher par rapport au précédent donc le rendement marginal va ~~baisse~~ décroître à chaque production d'un objet supplémentaire. Ainsi, les rendements marginaux sont décroissants.

2|2

Exercice 95 p219

$f : [0;15] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = (x+2)\,e^{-0,5x}$

Partie A - théorique

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;15]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;15]$.

Soit $x \in [0;15]$. On a :

$f'(x) = 1 \times e^{-0,5x} + -0,5\,e^{-0,5x}(x+2) = \cancel{e^{-0,5x}} - 0,5x\,e^{-0,5x} \cancel{- e^{-0,5x}}$

$f'(x) = -0,5x\,e^{-0,5x}$

Or $\forall x \in [0;15]$, $e^{-0,5x} > 0$ car $\forall X \in \mathbb{R}$ $e^{X} > 0$

$\forall x \in [0;15]$, $-0,5x < 0$

donc f' est négative sur $[0;15]$ donc f strictement décroissante sur $[0;15]$. On déduit :

x	0		15
$f'(x)$		$-$	
f	2	$\searrow$	$17e^{-7,5}$

$f(0) = 2$

$f(15) = 17\,e^{-7,5} \simeq 0,0094$

2) f est dérivable sur $[0;15]$ donc continue sur $[0;15]$, strictement décroissante, à valeurs dans $[17e^{-7,5};2]$ qui contient $0,1$ donc l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α dans $[0;15]$ d'après le corollaire du TVI.

3) A l'aide de la calculatrice, on obtient $9,4 < \alpha < 9,5$

4) $f'(x) = -0,5x\,e^{-0,5x}$ est dérivable sur $[0;15]$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0;15]$.

$\forall x \in [0;15]$, $f''(x) = -0,5\,e^{-0,5x} + (-0,5x) \times -0,5\,e^{-0,5x}$

$f''(x) = e^{-0,5x}(-0,5 + 0,25x)$

5) $f''(x)=0 \iff (0,25x-0,5)\,e^{-0,5x}=0$

$\iff 0,25x-0,5=0$

$\iff x=\frac{0,5}{0,25}=2$

$f''(x)>0 \iff (0,25x-0,5)\,e^{-0,5x}>0$

$\iff 0,25x-0,5>0$ car $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{x}>0$

$\iff 15\geq x>2$ car $x\in[0;15]$

$f''(x)<0 \iff 0\leq x<2$ car $x\in[0;15]$

On déduit que f admet un point d'inflexion en $x=2$ car $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

$\mathcal{C}_f$ est convexe sur $[2;15]$ et concave sur $[0;2]$.

Partie B - Interprétation des résultats

1) D'après le tableau de variations de f, on déduit que le médicament est actif pendant environ 9h30 (actif sur l'intervalle $[0;\alpha]$ avec $\alpha\simeq 9,5$ h avec $f(\alpha)=0,1$)

2) La concentration du médicament est modélisée par f.
f est décroissante sur $[0;15]$ donc la concentration du médicament diminue au fil des heures.
La vitesse de cette diminution de la concentration est modélisée par f'. Or f' est décroissante sur $[0;2]$ puis croissante sur $[2;15]$ donc la baisse de la concentration ralentit au bout de 2h après l'injection du médicament.

Exercice n° 118 p 224

$h : [10 ; 50] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto h(x) = \dfrac{90}{1+e^{-0,25x+6}}$ $\quad x$ en milliers d'€

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $\forall x \in [10 ; 50]$, $1 + e^{-0,5x+6} > 0$ donc h est bien définie et dérivable sur $[10 ; 50]$ comme quotient de fonctions définies et dérivables sur $[10 ; 50]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[10 ; 50]$.

$\forall x \in [10 ; 50]$, $h'(x) = 90 \times \dfrac{-\left(-0,25\, e^{-0,25x+6}\right)}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^2} = \dfrac{22,5\, e^{-0,25x+6}}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^2}$

De même, h' est dérivable sur $[10 ; 50]$ et :

$$h''(x) = \frac{22,5 \times \left(-0,25\, e^{-0,25x+6}\right)\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^2 - 2\times\left(-0,25\, e^{-0,25x+6}\right)\left(1+e^{-0,25x+6}\right)\times 22,5\, e^{-0,25x+6}}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^4}$$

$$h''(x) = \frac{-5,625\, e^{-0,25x+6}\left(1+e^{-0,25x+6}\right) + 11,25\, e^{-0,25x+6} \times e^{-0,25x+6}}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^3}$$

$$h''(x) = \frac{-5,625\, e^{-0,25x+6} - 5,625\left(e^{-0,25x+6}\right)\left(e^{-0,25x+6}\right) + 11,25\left(e^{-0,25x+6}\right)\left(e^{-0,25x+6}\right)}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^3}$$

$$h''(x) = \frac{-5,625\, e^{-0,25x+6} + 5,625\left(e^{-0,25x+6}\right)\left(e^{-0,25x+6}\right)}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^3}$$

$$h''(x) = \frac{5,625\, e^{-0,25x+6}\left(-1+e^{-0,25x+6}\right)}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^3}$$

2) $\forall x \in [10;50]$, $5,625\, e^{-0,25x+6} > 0$

et $\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^3 > 0$

donc $h''(x)$ est du signe de $e^{-0,25x+6} - 1$.

Or $e^{-0,25x+6} - 1 = 0 \iff e^{-0,25x+6} = e^0 \iff -0,25x+6 = 0$

$\iff x = \dfrac{6}{0,25} = 24$

et $e^{-0,25x+6} - 1 > 0 \iff e^{-0,25x+6} > e^0 \iff -0,25x+6 \geq 0$

$\iff x < 24$

et $e^{-0,25x+6} - 1 < 0 \iff x > 24$

Conclusion:

h'' s'annule en changeant de signe en $x = 24$

$h'' \geq 0$ sur $[10;24]$

$h'' \leq 0$ sur $[24;50]$

donc h est convexe sur $[10;24]$ et concave sur $[24;50]$

3) La fonction "envie" est modélisée par h'.

h' décroit sur $[24;50]$ car $h'' \leq 0$ sur $[24;50]$

x	10		24		50
$h''(x)$		+	0	−	
h'	0,64	$\nearrow$	5,625	$\searrow$	0,033

5) $\forall x \in [10;50]$, $h'(x) = \dfrac{22,5\, e^{-0,25x+6}}{\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^2} > 0$ donc

h est strictement croissante sur $[10\,;50]$.

$h(10) \simeq 2,63$ et $h(50) \simeq 89,9$

h est dérivable sur $[10;50]$ donc continue sur $[10;50]$, strictement croissante sur $[10;50]$, à valeurs dans [[illegible] ; [illegible]] qui contient 80 (avec $h(10) \simeq 2,63$ et $h(50) \simeq 89,9$) donc l'équation $h(x) = 80$ admet une unique solution α dans $[10;50]$ d'après le corollaire du TVI.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 32,318$ c'est à dire $\alpha \simeq 32\,318$ € $\simeq 32\,000$ € arrondi au millier.

Exercice no 120 p 225

$f : [0;4] \to \mathbb{R}$

$t \mapsto f(t) = 25\, e^{-0,5\,t}$

1) $f(0) = 25 \quad f(1) = 25\, e^{-0,5}$

$\%$ d'évolution $= \dfrac{f(1) - f(0)}{f(0)} \times 100 = \dfrac{25\, e^{-0,5} - 25}{25} \times 100$

$\%$ d'évolution $= \dfrac{25\,(e^{-0,5} - 1)}{25} \times 100 = \left(e^{-0,5} - 1\right) \times 100$

$\%$ d'évolution $= -39,35\ \%$

donc l'évolution est une diminution d'environ 39% à 1% près au cours de la 1ère année

2) $g : [4;10] \to \mathbb{R}$

$t \mapsto g(t) = 20\, e^{-0,1t^2} + t - 4,65$

a) g est dérivable sur $[4;10]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[4;10]$.

Soit $t \in [4;10]$, on a :

$g'(t) = 20 \times (-0,1 \times 2t) \times e^{-0,1t^2} + 1$

$g'(t) = -4t\, e^{-0,1t^2} + 1$

b) $g'(t) = -4t\, e^{-0,1t^2} + 1$ est dérivable sur $[4;10]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[4;10]$.

Soit $t \in [4;10]$, on a :

$g''(t) = -4\left(1 \times e^{-0,1t^2} + (-0,1 \times 2t)\, e^{-0,1t^2} \times t\right) + 0$

$g''(t) = -4\left(e^{-0,1t^2} - 0,2\, t^2\, e^{-0,1t^2}\right)$

$g''(t) = -4\, e^{-0,1t^2} + 0,8\, t^2\, e^{-0,1t^2}$

$g''(t) = 0,8\, e^{-0,1t^2}\left(-5 + t^2\right)$

Pour $4 \leq t \leq 10$ on a :

$16 \leq t^2 \leq 100$ car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$11 \leq t^2 - 5 \leq 95$

donc $\forall t \in [4;10]$, $g''(t) = 0,8\, e^{-0,1t^2}(t^2-5) > 0$

donc g' est strictement croissante sur $[4,10]$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$)

t	4	α	10
$g''(t)$		$+$	
g'	$\simeq -2,23$	$\nearrow 0 \nearrow$	$\simeq 0,99$

- $g'(4) = -4 \times 4\, e^{-0,1 \times 4^2} + 1$

  $g'(4) = -16\, e^{-1,6} + 1 < 0$

- $g'(10) = -4 \times 10\, e^{-0,1 \times 10^2} + 1$

  $g'(10) = -40\, e^{-10} + 1 > 0$

g' est continue sur $[4;10]$, strictement croissante sur $[4;10]$ à valeurs dans $[g(4);g(10)]$ avec $g(4) < 0$ et $g(10) > 0$, qui contient 0 donc l'équation $g'(t) = 0$ admet une unique solution α d'après le corollaire du TVI.

A l'aide de la calculatrice, on a : $\alpha \simeq 5,6$ arrondi à 0,1

3) a) On déduit que :

$\forall t \in [4;\alpha]$, $g'(t) \leq 0$
$\forall t \in [\alpha;10]$, $g'(t) \geq 0$ car $g'(\alpha) = 0$ et g' strictement croissante sur $[4;10]$

b) On déduit que :

g est décroissante sur $[4;\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha;10]$

t	4		α		10
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
g	$\simeq 10$	$\searrow$	$\simeq 1{,}8$	$\nearrow$	$5{,}4$

$g(5{,}6) \simeq 1{,}8$ $\qquad \alpha \simeq 5{,}6$

$g(4) \simeq 10$

$g(10) \simeq 5{,}4$

On déduit que le traitement semble efficace car la population croît de nouveau à partir de 5,6 ans. (la population décroît de 4 ans à 5,6 ans puis croît de nouveau).

Exercice n° 121 p 225

$f : [0;20] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 1000\,(x+5)\,e^{-0,2x}$

1) f est dérivable sur $[0;20]$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0;20]$.

$\forall x \in [0;20]$, $f'(x) = 1000\,e^{-0,2x} + 1000(x+5) \times -0,2\,e^{-0,2x}$

$f'(x) = 1000\,e^{-0,2x}\left(1 + (x+5) \times (-0,2)\right)$

$f'(x) = 1000\,e^{-0,2x}\left(1 - 0,2x + 1\right) = -200x\,e^{-0,2x}$

2) $\forall x \in [0;20]$, $-200x \leq 0$.
or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$
donc $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[0;20]$

$f(0) = 5000$ $\quad f(20) = 25000\,e^{-4} \simeq 458$

On déduit le tableau de variations de f sur $[0;20]$

x	0	20
$f'(x)$	$-$	
f	$5000 \searrow$	458

NB : $\forall x \in \,]0;20]$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0;20]$

3) f est dérivable sur $[0;20]$ donc continue sur $[0;20]$, strictement décroissante sur $[0;20]$, à valeurs dans $[458;5000]$ qui contient 3000 donc l'équation $f(x) = 3000$ admet une unique solution α dans $[0;20]$

A l'aide de la calculatrice, on a : $\alpha \simeq 6,88$ à $0,01$ près

4) a) $f'(x) = -200x\,e^{-0,2x}$ est dérivable sur $[0;20]$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0;20]$.

$f''(x) = -200\,e^{-0,2x} + (-200x) \times (-0,2)\,e^{-0,2x}$

$f''(x) = -200\,e^{-0,2x} + 40x\,e^{-0,2x}$

$f''(x) = e^{-0,2x}\left(-200 + 40x\right)$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-200 + 40x$.

or $-200 + 40x = 0 \iff x = \frac{200}{40} = 5$

On déduit le tableau de signes de $f''(x)$ sur $[0;20]$

x	0		5		20
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x) \geq 0$ sur $[5;20]$ donc f est convexe sur $[5;20]$

$f''(x) \leq 0$ sur $[0;5]$ donc f est concave sur $[0;5]$

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = 5$ donc $A(5; f(5))$ est un point d'inflexion pour C_f.

5) a) D'après la question 3), la demande est supérieure à 3000 objets dès lors que le prix unitaire est inférieur ou égal à $\alpha \simeq 6€88$ arrondi au centime avec f strictement décroissante sur $[0;20]$.

b) La baisse de quantité d'objets demandés s'accélère à partir de 5€ car dès lors f'' s'annule en $x = 5$ puis devient positive ce qui signifie que f' devient croissante (la vitesse de la baisse s'accélère car f est strictement décroissante (baisse de la demande) et la vitesse f' croît).