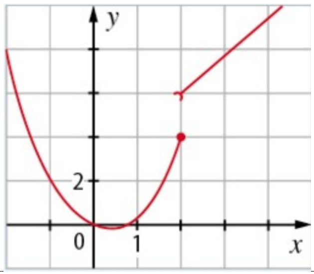
Exercice 1 : On considère la fonction définie sur [-2;4] dont la courbe est donnée ci-contre. f est-elle continue en 2 ? en -1 ?



Correction

On peut construire C_f sur l'intervalle [-2;2] sans lever le crayon donc f est continue en -1.

Par contre, on doit lever le crayon pour construire C_f sur]2;4] donc f n'est pas continue en 2.

Exercice 2 :

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=1-x & si\, x<2 \\ f(x)=2x-5\text{`} & si\, 2\leqslant x<3 \\ f(x)=x & si\, x\geqslant 3 \end{cases}$

1. Construire C_f puis émettre une conjecture sur sa continuité.
2. Démontrer cette conjecture.

Correction

1. Courbe C_f
2.

Continuité en $x=2$

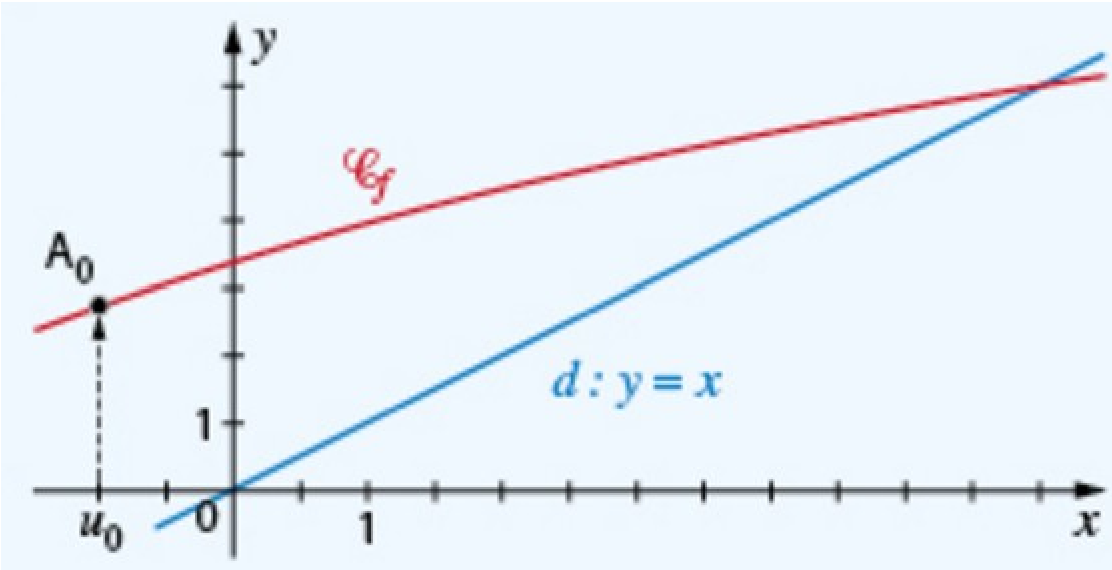
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 1-x=-1$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-5=-1$ et $f(2)=-1$ donc f est continue en 2.

Continuité en $x=3$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2x-5=1$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} x=3\neq 1$ donc f n'est pas continue en 3.

Exercice 3 :
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=-1$ et $u_{n+1}=2\sqrt{u_n+3}$.
On considère la fonction f définie sur $[-3;+\infty[$ par $f(x)=2\sqrt{x+3}$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>-3$. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.
2. A l'aide des courbes ci-dessous, construire u_1, u_2 et u_3 .



3. Étudier les variations de f sur $[-3;+\infty[$.
4. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 6.
5. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Correction

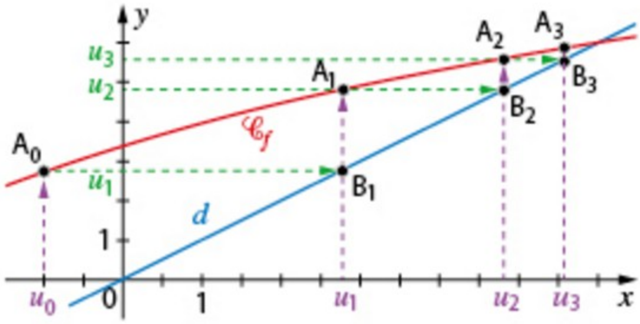
1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $P(n): u_n>-3$.
Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n=0$, on a $u_0=-1>-3$ donc $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> :
- Hypothèse de récurrence (HR) : on suppose qu'il existe un rang $n\geqslant 0$ pour lequel on a $u_n>-3$.
- On a $u_n>-3$ donc $u_n+3>0$ donc $\sqrt{u_n+3}>0$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $2\sqrt{u_n+3}>0$ donc $u_{n+1}>-3$ donc $P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : la propriété $P(n)$ est initialisée au rang $n=0$ et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 0$ d'après le principe du raisonnement par récurrence donc $\forall n\geqslant 0, u_n>-3$.

2.



3. f est dérivable sur $]-3;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $]-3;+\infty[$. Soit $x>-3$. on a :
$f'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{x+3}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}>0$ donc f est strictement croissante sur $[-3;+\infty[$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $P(n):u_n\leqslant 6$.
Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n=0$, on a $u_0=-1\leqslant 6$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :
On suppose qu'il existe un rang $n\geqslant 0$ pour lequel on a $P(n)$ est vraie.
On a $-3<u_n\leqslant 6$ donc $\sqrt{u_n+3}\leqslant\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3$ donc $2\sqrt{u_n+3}\leqslant 6$ donc $u_{n+1}\leqslant 6$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang $n=0$, héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 0$ d'après le principe du raisonnement par récurrence donc
$\forall n\geqslant 0, -3<u_n\leqslant 6$.

5. (u_n) est croissante et majorée donc convergente. Notons L sa limite.
$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 1, 0\leqslant u_n\leqslant 6$, alors $0\leqslant L\leqslant 6$.
$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$ et f *continue sur* $[-3;+\infty[$ donc $f(L)=L$.
$f(L)=L\Leftrightarrow L=2\sqrt{L+3}\Leftrightarrow L\geqslant 0$ et $L^2=4(L+3)\Leftrightarrow L\geqslant 0$ et $L^2-4L-12=0$

Résolution de l'équation $x^2-4x-12=0$ dans $\mathbb{R}$.
$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times 1\times(-12)=16+48=64=8^2>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes réelles $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4-8}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2<0$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4+8}{2}=\dfrac{12}{2}=6\geqslant 0$

Conclusion : seule la solution $x_2=6$ convient car positive donc $L=6$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=6$.

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-5x+2$.

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution dans [-3;-2].
2. Justifier que f est strictement croissante sur [-3;-2].
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution dans [-3;-2].
4. A l'aide de la méthode par balayage, donner un encadrement de c à 0,01 près.

Correction

1. f est continue sur [-3;-2] comme fonction polynôme avec $f(-3)=-10<0$ et $f(-2)=4>0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans [-3;-2] d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. f est dérivable sur [-3;-2] comme fonction polynôme et pour tout $-3\leqslant x\leqslant 2$ on a : $f'(x)=3x^2-5=3(x^2-\frac{5}{3})=3(x-\sqrt{\frac{5}{3}})(x+\sqrt{\frac{5}{3}})$. Or $\sqrt{\frac{5}{3}}<2$ donc $f'(x)>0$ comme produit de deux nombres strictement négatifs donc f est strictement croissante sur [-3 ;-2].

3. f est continue sur [3;2] comme fonction polynôme, strictement croissante sur [-3;2] telle que $f(-3)=-10<0$ et $f(-2)=4>0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution dans [-3;-2] d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

4. A l'aide de la méthode par balayage, on obtient $-2{,}42<c<-2{,}41$.
   En effet, $f(-2{,}42)\approx-0{,}072$ et $f(-2{,}41)\approx 0{,}0524$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$.

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a au moins une solution dans $[0;1]$.
2. Justifier que f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]1;+\infty[$.
4. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,01 près.
5. Par balayage, donner un encadrement de α à 0,1 près.
6. Par l'algorithme par dichotomie, retrouver cet encadrement de α à 0,1 près.

Correction

1. f est continue sur $[0;1]$ comme fonction polynôme avec $f(0)=1>0$ et $f(1)=-1<0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans [0;1] d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. f est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme fonction polynôme et pour tout $x>1$ on a : $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$. $\forall x>,(x+1)>0$ et $(x-1)>0$ donc $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

3. f est continue sur $]1;+\infty[$ comme fonction polynôme, strictement croissante sur $]1;+\infty[$, telle que $f(1)=-1<0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ d'après la propriété de la limite du plus haut degré au voisinage de $+\infty$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans $]1;+\infty[$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

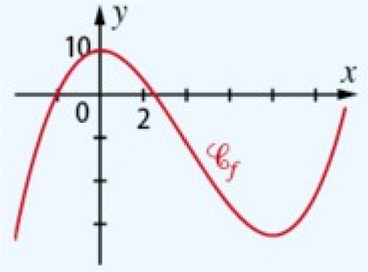
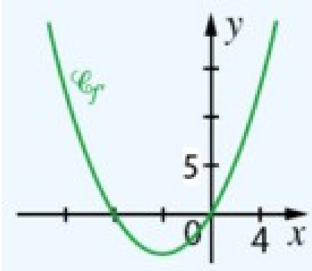
4. A l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha\approx1{,}53$ à 0,01 près.

5. Par balayage avec un pas de 0,1 on obtient $1{,}5<\alpha<1{,}6$.
En effet, $f(1{,}5)=-0{,}125<0$ et $f(1{,}6)=0{,}296>0$.

6. Par dichotomie, on obtient :
$f(1)=-1<0$ et $f(2)=3>0$ donc $1<\alpha<2$
$f(1{,}5)=-0{,}125<0$ et $f(2)=3>0$ donc $1{,}5<\alpha<2$
$f(1{,}5)=-0{,}125<0$ et $f(1{,}75)=1{,}109375>0$ donc $1{,}5<\alpha<1{,}75$
$f(1{,}5)=-0{,}125<0$ et $f(1{,}625)\approx0{,}41>0$ donc $1{,}5<\alpha<1{,}625$
$f(1{,}5)=-0{,}125<0$ et $f(1{,}5625)\approx1{,}127>0$ donc $1{,}5<\alpha<1{,}5625$ donc $1{,}5<\alpha<1{,}6$

Exercice 6 :
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer, par lecture graphique, les intervalles sur lesquels la fonction est convexe, concave.

Indication : pour déterminer graphiquement la convexité d'une fonction, on peut observer la position de sa courbe par rapport à ses tangentes.

Graphique 1 – courbe C_f	Graphique 2 – courbe $C_{f'}$
	

Correction

Graphique 1 – courbe C_f	Graphique 2 – courbe $C_{f'}$
f est concave sur $]-\infty;4]$ car C_f est située au dessous de ses tangentes. f est convexe sur $[4;+\infty[$ car C_f est située au dessus de ses tangentes.	f' est décroissante sur $]-\infty;-4]$ donc f est concave sur $]-\infty;-4]$. f' est croissante sur $[-4;+\infty[$ donc f est convexe sur $[-4;+\infty[$.