## Sujet A

$$f : [1,5 ; 6] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = (25x - 32)\, e^{-x}$$

1) $f$ est dérivable sur $[1,5 ; 6]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[1,5 ; 6]$.

$\forall x \in [1,5 ; 6]$, $f'(x) = 25\, e^{-x} + (25x - 32) \times (-e^{-x})$

$f'(x) = e^{-x}(25 - 25x + 32)$

$f'(x) = e^{-x}(-25x + 57)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ donc $\forall x \in [1,5 ; 6]$, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-25x + 57$.

On déduit le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variations de $f$

| $x$ | $1,5$ | | $\frac{57}{25}$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $55\, e^{-1,5}$ | ↗ | $25\, e^{-\frac{57}{25}}$ | ↘ | $118\, e^{-6}$ |

$(a = -25 < 0)$

3) $\frac{57}{25} \simeq 2,28$ ; $f(4) = 68\, e^{-4} \simeq 1,25$ $\quad f(5) = 93\, e^{-5} \simeq 0,63$

$f$ est dérivable donc continue sur $[4 ; 5]$, strictement décroissante sur $[4 ; 5]$ à valeurs dans $[f(5) ; f(4)]$ qui contient $1$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[4 ; 5]$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

4) a) A la fin du programme, l'écart entre a et b sera inférieur ou égal à $0,1$ c'est à dire $|b - a| \leq 0,1$.

b) il faut remplacer ligne 13 return a par return b

5) A l'aide de la calculatrice, on a $\alpha \simeq 4,4$ valeur approchée à $0,1$ par excès

Sujet B

$f : [0;1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = kx(1-x)$ avec $k \in \mathbb{R}$

Soit $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0$ donné.

1) On suppose $u_0 = 0,4$ et $k = 1$

a) $f(x) = x(1-x) = x - x^2$ dérivable sur $[0;1]$ comme fonction polynôme
$f'(x) = 1 - 2x$ d'où le tableau de variations de $f$ sur $[0;1]$

| $x$ | $0$ | | $1/2$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $0,25$ | $\searrow$ | $0$ |

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 0,5$

Initialisation : $u_0 = 0,4 \in [0;0,5]$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : on suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ pour lequel $0 \leq u_n \leq 0,5$. (HR)
Or $f$ est croissante sur $[0;1/2]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(0,5)$
donc $0 \leq u_{n+1} \leq 0,25 \leq 0,5$
donc $0 \leq u_{n+1} \leq 0,5$

donc la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$

Conclusion : la propriété est initialisée au rang $n=0$, héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n$ d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Étude des variations de $(u_n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - u_n^2 - u_n = -u_n^2 \leq 0$
donc $(u_n)$ est décroissante.

c) $(u_n)$ est décroissante minorée (par 0) donc convergente.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $0 \leq u_n \leq 0,5$ et $f$ est continue sur $[0;1]$
donc si $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ alors $L = f(L)$.

$L = f(L) \iff L = L - L^2 \iff -L^2 = 0 \iff L = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc selon le modèle choisi, les coccinelles disparaîtront.

2) On suppose maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1.8$.

a) $f : [0;1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = 1,8\,x\,(1-x)$

$f(x) = 1,8x - 1,8x^2$ est dérivable sur $[0;1]$ comme fonction polynôme.
$f'(x) = 1,8 - 3,6x$.
On déduit le tableau de variations de $f$ sur $[0;1]$

| $x$ | $0$ | | $0,5$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $0,45$ | $\searrow$ | $0$ |

$f(0) = 0$
$f(1) = 0$
$f(0,5) = 0,45 \in [0;0,5]$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 0,5$

Initialisation : $u_0 = 0,3 \in [0;0,5]$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité : (HR) : on suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ pour lequel $u_n \in [0;0,5]$.
Or $f$ est croissante sur $[0;0,5]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(0,5)$
donc $0 \leq u_{n+1} \leq 0,45 < 0,5$
donc $0 \leq u_{n+1} \leq 0,5$

donc la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : la propriété est initialisée au rang $n=0$, héréditaire donc vraie pour tout entier naturel $n$ d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Étude des variations de $(u_n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 1.8\,u_n - 1.8\,u_n^2 - u_n = 0,8\,u_n - 1,8\,u_n^2$
$u_{n+1} - u_n = u_n\,(0,8 - 1,8\,u_n)$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

<u>initialisation</u> : $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 1,8\, u_0 (1 - u_0) = 1,8 \times 0,3 (1 - 0,3)$

$u_1 = 0,54 \times 0,7 = 0,378$

donc $u_0 \leq u_1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

<u>hérédité</u> : supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ pour lequel

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0,5$ (HR)

or $f$ est croissante sur $[0 ; 0.5]$ donc

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0,5)$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0,45 < 0,5$

donc la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

<u>Conclusion</u> : la propriété est initialisée au rang $n = 0$, héréditaire donc vraie pour tout entier naturel d'après le principe du raisonnement par récurrence.

c) $(u_n)$ est croissante, majorée (par $0,5$) donc convergente. Notons $L$ sa limite.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f$ continue sur $[0 ; 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 0,5$ donc $f(L) = L$

$f(L) = L \iff 1,8 L - 1,8 L^2 = L$

$\iff 1,8 L^2 - 0,8 L = 0$

$\iff L (1,8L - 0,8) = 0$

$\iff L = 0$ ou $L = \frac{0,8}{1,8} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \in [0 ; 0,5]$

Or $(u_n)_n$ est croissante à valeurs dans $[0 ; 0,5]$ avec $u_0 = 0,3 > 0$ donc $L = \frac{4}{9}$

d) Sous ces hypothèses et selon le modèle, les coccinelles ne disparaîtront pas mais leur population ne dépassera pas 444444 individus.

d) Sous ces hypothèses et selon le modèle, les coccinelles ne disparaîtront pas mais leur population ne pourra excéder 444444 individus (environ.) -

3) Trop complexe à faire avec les graphes fournis -

# Sujet C

1) Soit $f : [1 ; +\infty[ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 1$

- $f$ est une fonction polynôme donc $f$ est dérivable sur $[1;+\infty[$.

$\forall x \geq 1,\quad f'(x) = -6x^2 + 2x - 1$ est une fonction polynôme du 2nd degré.

- signe de $f'(x)$

$\Delta = 2^2 - 4 \times (-6) \times (-1) = 4 - 24 = -20 < 0$ donc $f'(x)$ est négative strictement sur $[1 ; +\infty[$ car $a = -6 < 0$ donc $f$ est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

- On a $f(1) = -2 \times 1^3 + 1^2 - \cancel{1} + \cancel{1} = -1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$ d'après les propriétés de la limite du plus haut degré d'un polynôme en l'infini.

On déduit que : $\forall x \geq 1,\ f(x) \leq -1$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution dans $[1 ; +\infty[$

- <u>réponse : C</u>

2) Soit $f : [-1 ; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^4 + x^2 - 6$

$f$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $[-1 ; +\infty[$.

$\forall x \geqslant -1$, $f'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2+1)$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x$ donc du signe de $x$ sur $[-1 ; +\infty[$ car $\forall x \geqslant -1$, $2x^2+1 > 0$.

On déduit le tableau de signes de $f'(x)$ puis de variations de $f$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-4$ | $\searrow$ | $-6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- $\forall -1 \leq x \leq 0$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $[-1 ; 0]$.
- $f$ est dérivable donc continue sur $[0 ; +\infty[$, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, à valeurs dans $[-6 ; +\infty[$ qui contient 0.

En effet, $f(0) = -6$ et $\lim_{x \to +\infty} x^4 + x^2 - 6 = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$ d'après la propriété de la limite du plus haut degré d'un polynôme au voisinage de l'infini.

On déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[0 ; +\infty[$ d'après le corollaire du TVI.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 1{,}41$ donc $1{,}4 \leq \alpha \leq 1{,}6$

Conclusion : réponse b

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = -x^3 + 3x$$

$f$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x-1)(x+1)$

On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ puis de variations de $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- L'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions :
  $x_1 \in ]-\infty;-1]$ d'après le corollaire du TVI
  $1$ car $f(1) = 2$
- L'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $]-\infty;-1]$ d'après le corollaire du TVI.
  Or $\forall x \in [-1;1],\ -2 \leq f(x) \leq 2$ et $\forall x \geq 1,\ f(x) \leq 2$
  Conclusion : $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$
- L'équation $f(x) = -5$ admet une unique solution dans $[1;+\infty[$ d'après le corollaire du TVI.
  Or $\forall x \leq -1,\ f(x) \geq -2$ et $\forall x \in [-1;1]\ -2 \leq f(x) \leq 2$ donc $f(x) = -5$ n'a aucune solution dans $]-\infty;1]$
  Conclusion : $f(x) = -5$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

- L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[-1;1]$ d'après le corollaire du TVI et admet une unique solution dans $[1;+\infty[$ d'après le corollaire du TVI donc elle admet au moins deux solutions

Conclusion : réponse b et c

4/4

Sujet D

Partie A - 7 points

$f : [0;10] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{e^{-0,6} + e^{4,5-x}}$

1) a) $f$ est dérivable sur $[0;10]$ comme fonction inverse d'une fonction dérivable sur $[0;10]$ et qui ne s'annule pas sur $[0;10]$.

$f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = e^{-0,6} + e^{4,5-x}$ $\quad u'(x) = -e^{4,5-x}$

$f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ d'où $f'(x) = \dfrac{e^{4,5-x}}{\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^2}$ pour tout $x \in [0;10]$.

1

b) $f'(x) = \dfrac{e^{4,5-x}}{\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^2}$ est dérivable sur $[0;10]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[0;10]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;10]$.

Soit $x \in [0;10]$,

$f' = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^{4,5-x}$ $\quad u'(x) = -e^{4,5-x}$

$v(x) = \left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^2$ $\quad v'(x) = 2\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right) \times \left(-e^{4,5-x}\right)$

$f'' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ d'où pour tout $x \in [0;10]$,

$$f''(x) = \frac{\left(-e^{4,5-x}\right)\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^2 - 2\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right) \times \left(-e^{4,5-x}\right) \times \left(e^{4,5-x}\right)}{\left(\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right) e^{4,5-x} \times \left(-e^{-0,6} - e^{4,5-x} + 2e^{4,5-x}\right)}{\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^4}$$

1/4

$$f''(x) = \frac{e^{4,5-x}\left(-e^{-0,6} - e^{4,5-x} + 2e^{4,5-x}\right)}{\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^3}$$

$$f''(x) = \frac{e^{4,5-x}\left(-e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)}{\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^3}$$

$$f''(x) = \frac{e^{4,5-x}\left(e^{4,5-x} - e^{-0,6}\right)}{\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^3}$$

3

2) a) Soit $x \in [0;10]$,

$e^{4,5-x} - e^{-0,6} \geqslant 0 \iff e^{4,5-x} \geqslant e^{-0,6}$

$\iff 4,5 - x \geqslant -0,6$ car $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff -x \geqslant -0,6 - 4,5$

$\iff -x \geqslant -5,1$

$\iff x \leq 5,1$

$\iff x \leq \frac{51}{10}$

1

$S = \left[0; \frac{51}{10}\right]$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $\forall x \in [0;10]$, $e^{4,5-x} > 0$

et $\left(e^{-0,6} + e^{4,5-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $e^{4,5-x} - e^{-0,6}$

Or $e^{4,5-x} - e^{-0,6} \geqslant 0 \iff x \leq \frac{51}{10}$.

On déduit que :

$f''(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[0; \frac{51}{10}\right]$ 1

$f''(x) \leq 0 \iff x \in \left[\frac{51}{10}; 10\right]$

/ 2|4

3) $f''$ s'annule en $x = \frac{51}{10}$ en changeant de signe donc $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $I$ d'abscisse $x = 5,1$.

0,5

4) D'après le 2), $f''(x) \leq 0 \iff x \in \left[\frac{51}{10} ; 10\right]$ donc $f$ est concave sur cet intervalle.

0,5

Partie B - 3 points

0,25

1) a) $f(10) = \dfrac{1}{e^{-0,6} + e^{4,5-10}} = \dfrac{1}{e^{-0,6} + e^{-5,5}} \simeq 1,81$ arrondi au centième

b) $f(10)$ représente la température qu'il fera, selon ce modèle, 250 ans après 1900 car $10 \times 25 = 250$ c'est à dire en $1900 + 250 = 2150$.

$f(10) \simeq 1,81 < 2$ donc selon ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

0,25

2) a) Le point d'inflexion $I$ a pour abscisse $5,1$. Or $5,1 \times 25 = 127,5$, ce qui correspond à $1900 + 127,5 = 2027,5 \simeq 2028$ (année 2028)

0,5

b) $f(5,1) = \dfrac{1}{e^{-0,6} + e^{4,5-5,1}} = \dfrac{1}{e^{-0,6} + e^{-0,6}} = \dfrac{1}{2 \times e^{-0,6}} \simeq 0,91$

En 2028, l'augmentation de la température sera, selon ce modèle, égale à $0,91$ °C.

0,5

3) a) $\forall x \in [0;10]$, $f'(x) = \dfrac{e^{4,5-x}}{\left(e^{-0,6}+e^{4,5-x}\right)^2} > 0$ donc $f$

est strictement croissante sur $[0;10]$ donc la température terrestre 0,5

continuera d'augmenter au delà de 2030

b) Par contre, $f''(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{51}{10};10\right]$ et $\frac{51}{10} \times 25 = 127,5$

donc $f'$ est décroissante sur $\left[\frac{51}{10};10\right]$ c'est à dire, la vitesse du 0,5

réchauffement climatique diminue à partir de 2028 donc également

après 2030.

4) Selon ce modèle et par lecture graphique on lit :

$f(x) \geqslant 1,5$ pour $x \geqslant 6,7$ environ 0,5

Or $6,7 \times 25 = 167,5 \simeq 168$ qui correspond à l'an 2068.

C'est donc à partir de 2068 environ que la température de la

Terre dépassera de plus de $1,5^{\circ}$ celle de 1900.

4/4

Sujet E

## Partie A

1) Sur $[3;4]$, $f$ semble convexe car $f'' \geq 0$ sur $[3;4]$

2) $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion $I$ d'abscisse $2 \leq x_I \leq 3$ car $f''$ s'annule en $x_I$ en changeant de signe.

## Partie B

$$f : [0;5] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = (x^2 + 2x)\,e^{-x}$$

1) $f$ est dérivable sur $[0;5]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;5]$.

$\forall x \in [0;5]$, $f'(x) = (2x+2)e^{-x} + (x^2+2x) \times (-e^{-x})$

$$f'(x) = e^{-x}\,(2x + 2 - x^2 - 2x)$$
$$f'(x) = e^{-x}\,(-x^2 + 2)$$
$$f'(x) = -e^{-x}\,(x^2 - 2) = -e^{-x}\,(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

2) a) $f'(x) = e^{-x}(-x^2+2)$ est dérivable sur $[0;5]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;5]$.

$\forall x \in [0;5]$, $f''(x) = -e^{-x}(-x^2+2) + e^{-x} \times (-2x)$

$$f''(x) = e^{-x}\,(x^2 - 2 - 2x)$$
$$f''(x) = e^{-x}\,(x^2 - 2x - 2)$$

b) $f''(x) \leq 0 \iff e^{-x}(x^2 - 2x - 2) \leq 0$ et $0 \leq x \leq 5$

$\iff x^2 - 2x - 2 \leq 0$ et $0 \leq x \leq 5$

car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

Etude du signe de $x^2 - 2x - 2$ sur $\mathbb{R}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 4 + 8 = 12 > 0$ donc $x^2 - 2x - 2$ admet deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3} < 0$$

$$x_2 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = 1+\sqrt{3} \in [0;5].$$

Or le coefficient des $x^2$ est $a = 1 > 0$ d'où le signe de $f''(x)$ sur $[0;5]$

| $x$ | $0$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | | $+$ | |

<u>Conclusion :</u> $\forall x \in [0; 1+\sqrt{3}]$, $f''(x) \leq 0$ donc $f$ est concave sur $[0; 1+\sqrt{3}]$.

c) $f''$ s'annule en changeant de signe en $x = 1+\sqrt{3}$ sur $[0;5]$ donc $C_f$ admet un point d'inflexion $I\left(1+\sqrt{3}, f(1+\sqrt{3})\right)$ avec

$$f(1+\sqrt{3}) = \left((1+\sqrt{3})^2 + 2(1+\sqrt{3})\right) e^{-(1+\sqrt{3})}$$

$$f(1+\sqrt{3}) = \left(1 + 2\sqrt{3} + 3 + 2 + 2\sqrt{3}\right) e^{-(1+\sqrt{3})}$$

$$f(1+\sqrt{3}) = \left(6 + 4\sqrt{3}\right) e^{-(1+\sqrt{3})}$$