Chapitre 6 : Probabilités & échantillonnage

Au 18ème siècle, l'un des jeux pratiqués à la cour de Florence consistait à lancer 3 dés et à faire la somme des faces obtenues. Le grand-duc de Toscane observa que la somme 10 revenait le plus souvent alors qu'il y a autant de façons d'écrire 10 comme somme de trois entiers compris entre 1 et 6 que 9. Ce paradoxe a été expliqué par Galilée et fut un problème qui fit émerger l'étude des probabilités.

I. Échantillonnage

1. Échantillon

Définition : Répéter une expérience de façon indépendante signifie que le résultat de chaque expérience ne dépend pas du résultat de l'expérience précédente.

Définition : Pour une expérience à deux issues, un échantillon de taille n est la liste des n résultats obtenus lorsqu'on répète n fois de façon indépendante cette expérience.

Définition : La distribution des fréquences associées à un échantillon est la donnée des fréquences des deux issues de cet échantillon.

Exemple: On lance une pièce de monnaie équilibrée cinq fois de suite.
On obtient par exemple l'échantillon PPFPF en notant P : « Pile » et F : « Face ».
Dans cet échantillon e de taille 5, la fréquence de l'issue P est $\frac{3}{5}$.

2. Simulation

Définition : Une expérience aléatoire est une expérience pour laquelle on connaît toutes les issues possibles mais pour laquelle il est impossible de prévoir le résultat : celui-ci est soumis au hasard.

Définition : Simuler une expérience aléatoire, c'est la remplacer par une autre expérience qui conduit aux mêmes résultats dans les mêmes conditions.

Remarque : les nombres aléatoires générés par un logiciel (tableur ou programme informatique) sont qualifiés de pseudo-aléatoires.

Exemples :

- La naissance d'un enfant est une expérience aléatoire que l'on peut simulée par le jeu de Pile ou Face.
- Le tirage d'une carte dans un jeu de 52 cartes peut être simulé par une fonction Python ont le résultat retourne un nombre compris entre 1 et 52.

Exercice 1 : On considère une expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un nombre entier entre 1 et n . Écrire une fonction Python exp1 de paramètre n qui renvoie le résultat de cette expérience.

Exercice 2 : Une urne contient 30 % de boules blanches et 70 % de boules noires.

1. Écrire une fonction Python exp2 qui simule le résultat de cette expérience. On pourra associer le nombre 1 à Blanche et le nombre 2 à Noire.
2. On simule n fois cette expérience aléatoire. Compléter l'algorithme ci-contre afin que la variable s comptabilise le nombre de boules noires tirées lors de ces n expériences aléatoires.
3. Écrire une fonction Python de paramètre n retournant le nombre de boules noires titrées.
4. Que faut- modifier à cette fonction Python pour qu'elle retourne la fréquence de boules noires au lieu du nombre de boules noires ?

```
s ← 0
Pour k variant de 1 à n
    r ← exp2()
    Si r ........
        alors ...............
    Fin Si
Fin Pour
```

3. Estimation d'une probabilité

Propriété : On considère une expérience aléatoire et un échantillon de taille n de cette expérience. Lorsque n devient grand, sauf exception, la fréquence observée d'une issue est proche de la probabilité de cette issue.

Remarques : Cette propriété permet de donner une estimation d'une probabilité d'un caractère observée dans une population à travers la fréquence observée dans un échantillon.

II. Expérience aléatoire – Issues – Univers - Événements

1. Expérience aléatoire et issues

Définition : Une expérience est dite **aléatoire** si :

- elle conduit à des issues possibles qu'on peut nommer
- on ne sait pas laquelle de ces issues va se réaliser

Définition : Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent les **éventualités** ou **issues**. L'ensemble des éventualités s'appelle l'**univers**, on le note souvent Ω.

Exemple :

→ Expérience aléatoire : lancer d'un dé.
→ Issues : il y en a 6 : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
→ Univers : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

2. Événements

Définition : Un **événement** est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.
On dit qu'un événement est réalisé si l'issue de l'expérience est l'une des issues qui le compose.

Exemple :
→ E1 = "le n° est pair" = {2 ; 4 ; 6}.
→ E2 = "le n° est au moins égal à 5" = {5 ; 6}.

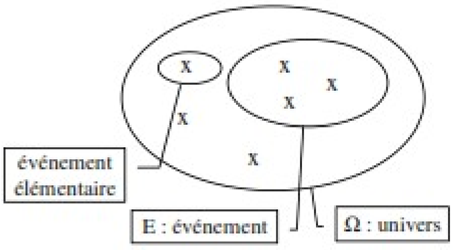
Exercice 3 :
On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un entier compris entre 1 et 20.

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Déterminer les issues qui réalisent l'événement A : « obtenir un multiple de 5 »
3. En déduire l'écriture de l'événement A sous forme d'un ensemble.
4. Écrire sous forme d'un ensemble l'événement B : « obtenir un diviseur de 12 ».

3. Événements particuliers

Définition :

- Ω s'appelle l'événement **certain**.
- $\varnothing$ s'appelle l'événement **impossible**.
- {a} s'appelle un événement **élémentaire** (il est formé d'une seule éventualité).

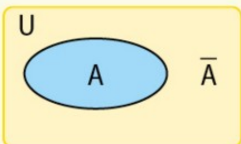


Exemple : On lance un dé.

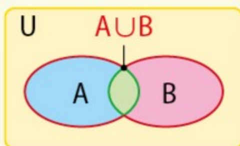
→ L'événement certain est {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
→ Les 6 événements élémentaires sont {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6}.
→ L'événement « Obtenir un nombre impair » est {1 ; 3 ; 5}.
→ L'événement « Obtenir un nombre inférieur à 7 » est un événement certain.
→ L'événement « Obtenir 8 » est un événement impossible.

Événements particuliers

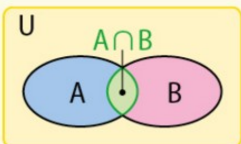
• L'événement **contraire** de A, noté $\overline{A}$, est constitué des issues n'appartenant pas à A.



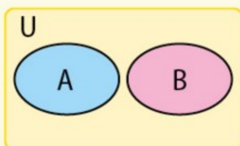
• L'événement « A ou B », noté A ∪ B, est constitué des issues qui appartiennent à **au moins** un de ces deux événements.



• L'événement « A et B », noté A ∩ B, est constitué des issues qui appartiennent à ces deux événements.



• Les événements A et B sont dits **incompatibles** si A ∩ B est l'événement impossible, c'est-à-dire si $A \cap B = \varnothing$.



Source – Indice – Bordas -Seconde - 2019

Exemple : On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes.
Soit les événements :

A : la carte est noire
B : la carte est un cœur,
C : la carte est un carreau
D : la carte est un 9.

Alors :

$\overline{A}$: la carte est rouge
A et B sont incompatibles
B ∪ C : la carte est rouge
C ∩ D : la carte est le 9 de carreau

III. Probabilité sur un univers fini

1. Fréquence d'une issue

Définition : Si une issue x_i est réalisée n_i fois au cours de N fois une même expérience, sa **fréquence f** est égale au rapport $\boldsymbol{\frac{n_i}{N}}$

Exemple : on lance 20 fois de suite une pièce; on obtient 12 fois « pile » et 8 fois « face » :

$$f_{pile}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0{,}6 \qquad f_{face}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

Propriété :

- la **fréquence d'une issue** est **comprise entre 0 et 1** : $0\leqslant f_i\leqslant 1\ pour\ 1\leqslant i\leqslant n$
- la **somme des fréquences** de toutes les issues **est égale à 1** : $f_1+f_2+...+f_n=1$

2. Probabilité d'une issue

Définition : Plus le nombre de fois où on répète une même expérience est **grand**, plus la fréquence f_i d'une issue x_i se rapproche inexorablement d'un nombre qu'on appelle sa **probabilité** $\boldsymbol{p_i}$

Exemple : si on lance un très grand nombre de fois une pièce de monnaie, f_{pile} se rapprochera de 0,5.
On pose alors $p_{pile}=0{,}5$

Propriété :

- la **probabilité d'une issue** est **comprise entre 0 et 1** : $0\leqslant p_i\leqslant 1\ pour\ 1\leqslant i\leqslant n$
- la **somme des probabilités** de toutes les issues **est égale à 1** : $p_1+p_2+...+p_n=1$

3. Loi de probabilité

Définition : Soit $E=\{x_{1,}x_{2,}x_{3,...},x_n\}$ un univers.
Définir une **loi de probabilité** sur E, c'est associer à chaque issue x sa probabilité

Remarque : On représente souvent la loi de probabilité sous la forme d'un tel tableau :

Issues	x_1	x_2	...	x_n
Probabilités	p_1	p_2	...	p_n

4. Probabilité d'un événement

Définition : La **probabilité d'un événement** E, notée **p(E)** est la somme des probabilités des issues qui réalisent E.

Exemple : si $E=\{x_{1,}x_{3,}x_4\}$ alors $p(E)=p(x_1)+p(x_3)+p(x_4)=p_1+p_3+p_4$

Propriétés :

- $\mathbf{0\leqslant p(A)\leqslant 1}$
- $\mathbf{p(\emptyset)=0}$ (la probabilité de l'événement impossible est nulle)
- **p(Ω) = 1** (la probabilité de l'événement certain est égale à 1)
- $\mathbf{p(\bar{A})=1-p(A)}$
- $\mathbf{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$
- Si A et B sont incompatibles alors $\mathbf{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$

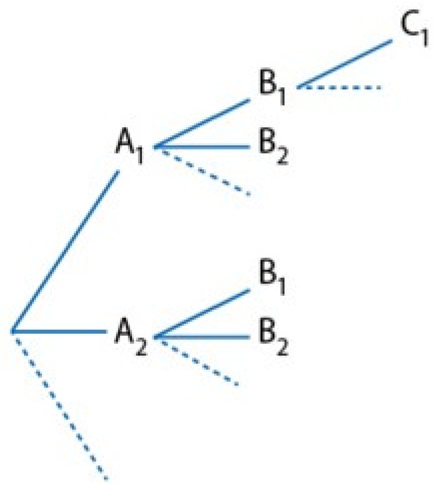
IV. Calculs de probabilités

1. Tableau et arbres de probabilités

Lorsqu'une expérience aléatoire est composée de deux épreuves, A et B, constituée chacune de plusieurs issues A_1, A_2,…, B_1, B_2 … , on peut utiliser un tableau à double entrée comme ci-dessous.

	B_1	B_2	B_3	…	…
A_1	$(A_1 ; B_1)$	$(A_1;B_2)$	$(A_1;B_3)$		
A_2	$(A_2;B_1)$	$(A_2;B_2)$	$(A_2;B_3)$		
…					
…					

Lorsqu'une expérience aléatoire est composée de plusieurs épreuves A, B, C … on peut également utiliser un arbre dit de probabilités dessiné horizontalement.
- Sur le 1er niveau de branches, on indique les issues A_1 , A_2 …
- Sur le 2ème niveau, on indique les issues B_1 , B_2 …
- Sur le 3ème niveau, on indique les issues C_1, C_2 … et ainsi de suite
- Sur chaque branche, on indique la probabilité de l'issue



Exercice 4 :
Dans une population, la probabilité pour une personne de parler anglais est 0,3. La probabilité de parler espagnol est 0,15 et de parler les deux langues est 0,05.
On choisit au hasard une personne dans la population.
On définit les événements A : « la personne choisie parle anglais » et B : « la personne choisie parle espagnol ».

1. Préciser p(A) et p(B)
2. A l'aide de A et de B, écrire l'événement « la personne choisie parle ces deux langues » puis donner sa probabilité.
3. En déduire par une phrase l'événement $A \cup B$ puis déterminer $p(A \cup B)$

Exercice 5 :
Chaque jour, Ilyes reçoit entre 2 et 7 appels sur son téléphone mobile avec une probabilité donnée dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'appels	2	3	4	5	6	7
Probabilités	0,05	0,08	0,15	0,37	0,25	0,1

1. Déterminer la probabilité de l'événement A. : « Ilyes recevra au moins 3 appels »
2. Déterminer la probabilité de l'événement B : « Ilyes recevra au plus 5 appels »

2. Équiprobabilité

Définition : Quand toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Exemples de situations dont les issues sont équiprobables
- On jette un dé non pipé.
- Les jetons ou les boules sont indiscernables au toucher.
- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
- On lance une pièce parfaitement équilibrée.

Propriété : Dans le cas **d'équiprobabilité**, s'il y a *n* issues en tout, la probabilité :
- de chacune des issues est $\frac{1}{n}$
- d'un événement A, composé de *k* issues, est $p(A)=\frac{k}{n}=\frac{nombre\, d'issues\, de\, A}{nombre\, total\, d'issues}$

Démonstration :
Soit n le nombre d'issues possibles à l'expérience. On a $p_1+p_2+...+p_n=1$ avec $p_1=p_2=...=p_n$
donc $p_i=\frac{1}{n}$
Soit k le nombre d'issues favorables à l'événement A. On a $p(A)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}=k\times\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$ #

Exercice 6 :
On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
1. Quelle est la probabilité de l'événement A : « on obtient un as » ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement B : « on obtient un cœur » ?