## Récurrence linéaire d'ordre 2

### Approfondissement

On dit qu'une suite $(u_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si elle vérifie une relation de récurrence du type :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (1)

où $a$ et $b$ sont des réels donnés.

La donnée des deux premiers termes $u_0$ et $u_1$ définit une unique suite vérifiant la relation (1).

**1.** Montrer qu'une suite géométrique de premier terme $u_0$ non nul et de raison $q$ non nulle vérifie la relation (1) si et seulement si $q$ est solution de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.

Cette équation est appelée équation caractéristique de la suite linéaire d'ordre 2.

**2.** On admet le théorème suivant.

Soit $\Delta$ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$.

- **Cas $\Delta > 0$.** L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes $x_1$ et $x_2$.
$(u_n)$ vérifie (1) si et seulement s'il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.
- **Cas $\Delta = 0$.** L'équation caractéristique possède une solution double réelle, notée $x_0$.
$(u_n)$ vérifie (1) si et seulement s'il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n$.
- **Cas $\Delta < 0$.** Ce cas nécessite l'utilisation des nombres complexes.

**a.** Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -15 \text{ et } u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n.$$

Déterminer une formule explicite de $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.

**b.** Soit la suite $(F_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

appelée suite de Fibonacci, du nom du mathématicien italien du XIII^e siècle.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).$$

où $\varphi$ est le nombre d'or $\left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Montrer ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \frac{1-\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^n}.$$

- Conjecturer la valeur du rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci quand $n$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

**Correction**

1. Soit $(u_n)$ une suite géoémtrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $u_0 \neq 0$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n, u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$ et $u_{n+2} = u_0 \times q^{n+2}$ . On déduit que :

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \Leftrightarrow u_0 \times q^{n+2} = a \times u_0 \times q^{n+1} + b \times u_0 \times q^n$$
$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \Leftrightarrow q^2 = a q + b \text{ avec } u_0 \neq 0 \text{ et } q \neq 0$$
$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \Leftrightarrow q \text{ solution de l'équation } x^2 - ax - b = 0$$

2. (a) Soit $(u_n)$ une suite définie par $u_0 = 1, u_1 = -15$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 10 u_{n+1} - 25 u_n$ .
L'équation caractéristique associée à $(u_n)$ est $x^2 - 10x + 25 = 0$ .
$x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ .
On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) \times 5^n$ avec $(\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$ .
Or, $\begin{cases} 1 = (\lambda \times 0 + \mu) \times 5^0 \\ -15 = (\lambda \times 1 + \mu) \times 5^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \mu \\ -15 = 5\lambda + 5\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \mu \\ 5\lambda = -15 - 5 = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \mu \\ \lambda = -4 \end{cases}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-4n + 1) \times 5^n$

(b) Soit $(F_n)$ une suite définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

L'équation caractéristique associée à $(F_n)$ est $x^2 - x - 1 = 0$ .
Résolution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ .
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc l'équatino admet deux racines réelles distinctes $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ . On déduit que :
$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \lambda \phi'^n + \mu \phi^n$ avec $(\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$ . Or,

$$\begin{cases} 0 = \lambda \times \phi'^0 + \mu \phi^0 \\ 1 = \lambda \times \phi'^1 + \mu \phi^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda \phi' + \mu \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 1 = \lambda \phi' - \lambda \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 1 = \lambda(\phi' - \phi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 1 = \lambda \times (-\sqrt{5}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \left( \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left( \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \phi'^n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1}-\phi'^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n-\phi'^n)}=\frac{\phi^{n+1}\left(1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n+1}\right)}{\phi^n\left(1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n}\right)}=\phi\left(\frac{1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n+1}}{1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n}}\right)$$

Or, $\frac{\phi'}{\phi}=\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ donc $-1<\frac{\phi'}{\phi}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^n=0$ .

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n}\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n+1}}{1-(\frac{\phi'}{\phi})^{n}}\right)=1$ comme quotient de limites.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$ .