Contrôle Terminale – Chap 2 – Loi binomiale

Exercice 1 : QCM (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97% des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses. Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note *X* la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses. On admet que *X* suit la loi binomiale de paramètres $n=9$ et $p=0{,}03$.

Question 1 :
La probabilité qu'aucune des neufs adresses soit illisible est égale, au centième près à :

a. 0 b. 1 c. $0{,}24$ d. $0{,}76$

Question 2 :
La probabilité qu'exactement deux des neufs adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{9}{2}\times 0{,}97^2\times 0{,}03^7$ b. $\binom{7}{2}\times 0{,}97^2\times 0{,}03^7$

c. $\binom{9}{2}\times 0{,}97^7\times 0{,}03^2$ d. $\binom{7}{2}\times 0{,}97^7\times 0{,}03^2$

Question 3 :
La probabilité qu'au moins une des neufs adresses soit illisible pour la machine est :

a. $p(X<1)$ b. $p(X\leq 1)$ c. $p(X\geq 2)$ d. $1-p(X=0)$

Question 4 :
Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue successivement 10 tirages aléatoires avec remise . Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) d'avoir 4 boules noires et 6 boules rouge ?

a. $0{,}1662$ b. $0{,}4$ c. $0{,}1115$ d. $0{,}8886$

Exercice 2 : (11 points)

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondis à 10^{-3} *si nécessaire.*
Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test antidopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme. On note *D* l'événement « l'athlète est dopé » et *T* l'événement « le test est positif ». On admet que la probabilité de l'événement *D* est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Calculer $p(D\cap T)$ et interpréter le résultat.
3. Démontrer que $p(T)=0{,}083$.
4. Les événements *D* et *T* sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
5. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

Partie B

Dans un compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103. On suppose que les organisateurs décident de contrôler 50 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note *X* la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 50 athlètes contrôlés. Le nombre d'athlètes est suffisamment importante pour assimiler cette situation à un tirage avec remise.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire *X*. Justifier la réponse.
2. Déterminer la valeur exacte de $p(X=5)$ puis un arrondi et interpréter le résultat.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 athlètes contrôlés présente un test positif ?
4. Calculer $p(10\leq X<20)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier *k* tel que $p(X\leq k)>0{,}99$. Interpréter le résultat.

Exercice 3 : (10,5 points)

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondis à 10^{-3} *si nécessaire.*

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17% de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32% sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

Partie A

On interroge une personne au hasard et on note :

- *R* l'événement « la personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- *J* l'événement « la personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun et qu'il soit âgée de 18 à 24 ans.
3. D'après cette même étude, les jeune de 18 à 24 ans représentent 11% de la population française. Montrer que la probabilité que le personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 100 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise. Soit *X* la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 100 personnes interrogées. On admet que la variable *X* suit la loi binomiale de paramètre $n=100$ et $p=0{,}17$.

1. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95% de chance pour que, parmi les 100 personnes interrogées, moins de 21 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun. Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
2. Calculer $p(X\geq 16)$ et interpréter le résultat.
3. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 100 personnes interrogées ?
4. Déterminer l'intervalle de fluctuation centré $[a\,;b]$ tel que la probabilité $p(X\in[a\,;b])\geq 0{,}95$.
5. Interpréter le résultat précédent.
6. Dans cette question, on choisit un échantillon de *n* personnes. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins une personne interrogée dans l'échantillon qui utilise régulièrement les transports en commun dans cet échantillon. Montrer que $p_n=1-0{,}83^n$.
7. Déterminer la valeur renvoyée par le programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable p un nombre réel.
8. Interpréter la valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil():
    n=0
    p=0
    while p<=0.99:
        n=n+1
        p=1-0.83**n
    return n
```

Exercice 4 : (10,5 points)

En mai 2019, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2019, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail. Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et chaque mois 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n). Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le *n*-ième mois après le mois de mai 2019. Ainsi $a_0=200$.

On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=0{,}85\,a_n+450$.

Partie A

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=a_n-3000$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
2. Exprimer v_n en fonction de *n* pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=-2800\times0{,}85^n+3000$.
4. Compléter le programme le programme Python ci-contre de sorte que la valeur affichée à l'issue de l'exécution de ce dernier représente le nombre de collaborateurs en télétravail en mai 2020.

```
a= ..................
for i in range(1, ...):
    a=0.85*a+450
print(a)
```

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{5u_n+4}{u_n+2}$ où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de *n* mois après le mois de mai 2019.

On admet que la fonction f définie pour tout $x\in[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq4$.
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq4-u_n\leq3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 : (4 points)
Une organisation gouvernementale affirme que 60% des oiseaux d'une réserve naturelle sont bagués. Pour vérifier cette affirmation, un ornithologue contrôle au hasard 280 oiseaux. Parmi ceux-ci, 120 sont bagués. Peut-on valider l'affirmation de l'organisation gouvernementale ?
Toute trace de recherche même infructueuse sera prise en compte dans la notation de l'exercice donc n'hésitez pas à laisser une trace écrite de vos recherches.

Correction

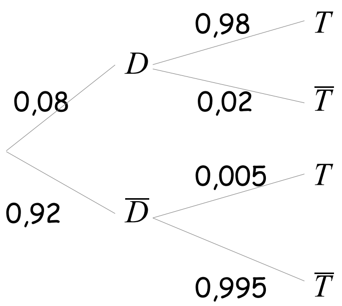
Exercice 1 : QCM (4 points)

1. Réponse d. 0,76
2. Réponse c. $\binom{9}{2}\times 0{,}97^7\times 0{,}03^2$
3. Réponse d. $1-p(X=0)$
4. Réponse c. $0{,}1115$

Exercice 2 : (11 points)

Partie A :(4,5)

1.



(0,75)

2. $p(D\cap T)=p(D)\times p_D(T)=0{,}08\times 0{,}98=0{,}0784$ **(0,5)**
la probabilité que l'athlète soit dopé et ait un test positif est est 0,0784. **(0,25)**

3. Les événements D et $\overline{D}$ forment une partition**(0,25)** de l'univers, d'après la formule des probabilités totales**(0,25)**, on a :
$p(T)=p(D\cap T)+p(\overline{D}\cap T)=0{,}0784+0{,}92\times 0{,}005$ donc
$p(T)=0{,}0784+0{,}0046=0{,}083$ **(1)**

4. $p(D)\times p(T)=0{,}08\times 0{,}083=0{,}00664$ **(0,25)** et $p(D\cap T)=0{,}0784$ donc $p(D\cap T)\neq p(D)\times p(T)$ **(0,25)** : les événements D et T ne sont pas indépendants.**(0,25)**

5. On cherche $p_T(D)$ **(0,25)** et $p_T(D)=\dfrac{p(D\cap T)}{p(T)}=\dfrac{0{,}0784}{0{,}083}\approx 0{,}945$ **(0,5)**

Partie B :(6,5)

1. L'expérience consiste à contrôler un athlète et regarder s'il a un test positif. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli**(0,25)** : il y a « succès » si l'athlète a un test positif, la probabilité de succès est $p=0{,}103$.**(0,25)**
Cette expérience est répétée**(0,25)** 50 fois de façon identique**(0,25)** et indépendante**(0,25)**, la variable aléatoire suit donc la loi binomiale de paramètre $n=50$ **(0,25)**et $p=0{,}103$.

2. $p(X=5)=\binom{50}{5}\times 0{,}103^5\times 0{,}897^{45}\approx 0{,}184$ **(0,5+0,25)**: la probabilité que 5 athlètes soit contrôlés positif est 0,184. **(0,25)**

3. On cherche $p(X\geq 4)$ **(0,25)** et d'après la calculatrice $p(X\geq 4)=1-p(X\leq 3)\approx 0{,}771$ **(0,25+0,25)**

4. $p(10\leq X<20)=p(10\leq X\leq 19)=p(X\leq 19)-p(X\leq 9)\approx 0{,}029$ **(0,5+0,25)** : La probabilité qu'il y entre 10 et 19 athlètes testés positif est de 0,029 **(0,25)**

5. $E(X)=n\times p=50\times 0{,}103=5{,}15$ **(0,5)** : Sur un échantillon de 50 athlètes, il y en aura en moyenne 5,15 qui auront un test positif **(0,25)**.

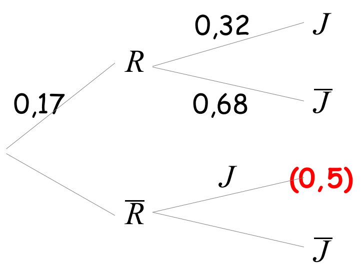
6. En utilisant la table des valeurs de $p(X\leq k)$ pour *k* compris entre 0 et 50 à l'aide de la

fonction TABLE de la calculatrice, on a : $p(X\leq 10)\approx 0{,}988< 0{,}99$ **(0,25)** et $p(X\leq 11)\approx 0{,}996> 0{,}99$ **(0,25)** donc le plus petit entier *k* tel que $p(X\leq k)> 0{,}99$ est $k=11$ **(0,25)**. Cela signifie que l'on a plus de 99% de chance**(0,25)** que dans un échantillon de 50 athlètes**(0,25)**, il n'y aura pas plus de 11 athlètes testés positif. **(0,25)**

Exercice 3 : (10,5 points)

Partie A :(3,5)

1.



2. On cherche $p(R\cap J)$ **(0,25)** et $p(R\cap J)=p(R)\times p_R(J)=0{,}17\times 0{,}32=0{,}0544$ **(0,5)**

3. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition**(0,25)** de l'univers,d'après la formule des probabilités totales**(0,25)**, on 0,83 a $p(J)=p(R\cap J)+ p(\overline{R}\cap J)$ donc $p(\overline{R}\cap J)=p(J)-p(R\cap J)=0{,}11-0{,}0544=0{,}0556\approx 0{,}056$ **(1)**

4. On cherche $p_{\overline{R}}(J)$ **(0,25)** et $p_{\overline{R}}(J)=\dfrac{p(\overline{R}\cap J)}{p(\overline{R})}=\dfrac{0{,}056}{0{,}83}\approx 0{,}067$ **(0,5)**

Partie B :(7)

1. D'après la calculatrice $p(X\leq 21)\approx 0{,}883$ **(0,25)** donc $p(X\leq 21)< 0{,}95$ **(0,25)** donc c'est faux.

2. D'après la calculatrice $p(X\geq 16)=1-p(X\leq 15)\approx 0{,}646$ **(0,25+0,25) :** cela signifie que la probabilité que plus de 16 personnes interrogée de l'échantillon utilisent régulièrement les transports en commun est de 0,646. **(0,25)**

3. On cherche $E(X)$ **(0,25)** et $E(X)=n\times p=100\times 0{,}17=17$ **(0,5)**

4. $\alpha=0{,}05$ donc $\dfrac{\alpha}{2}=0{,}025$ **(0,25)** et $1-\dfrac{\alpha}{2}=0{,}975$ **(0,25)**

   On cherche alors le plus petit entier *a* tel que $p(X\leq a)> 0{,}025$ et le plus petit entier *b* tel que $p(X\leq b)\geq 0{,}975$. On utilise alors la table des valeurs de $p(X\leq k)$ pour *k* compris entre 0 et 100.
   On a $p(X\leq 9)\approx 0{,}017< 0{,}025$ et $p(X\leq 10)\approx 0{,}036> 0{,}025$ donc $a=10$ **(0,75)** et $p(X\leq 24)\approx 0{,}973< 0{,}975$ et $p(X\leq 25)\approx 0{,}985> 0{,}975$ donc $b=25$ **(0,75)**.
   L'intervalle $[a\,;b]$ est $[10\,;25]$

5. Cela signifie que l'on a plus de 95% de chance**(0,25)** que dans un échantillon de 100 personnes**(0,25)**, il y ait entre 10 et 25 personnes qui utilisent régulièrement les transports en commun. **(0,25)**

6. $p_n=p(X\geq 1)=1-p(X=0)$ **(0,25+0,25)**

or $p(X=0)=\binom{n}{0}\times 0{,}17^0\times 0{,}83^n=1\times 1\times 0{,}83^n=0{,}83^n$ **(0,5)** donc $p_n=1-0{,}83^n$.

7. D'après la calculatrice, $1-0{,}83^{24}\approx 0{,}988<0{,}99$ **(0,25)** et $1-0{,}83^{25}\approx 0{,}991>0{,}99$ **(0,25)** donc $n=25$ **(0,25)**

8. Cela signifie qu'il faut avoir au minimum un échantillon de 25 personnes pour que la probabilité qu'au moins une personne utilise les transports en commun dans l'échantillon dépasse 0,99. **(0,25+0,25)**

Exercice 4 : (10,5 points)

Partie A :(3)

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=a_{n+1}-3000=0{,}85a_n+450-3000=0{,}85a_n-2550$.

   De plus $v_n=a_n-3000$ donc $a_n=v_n+3000$.

   Ainsi $v_{n+1}=0{,}85(v_n+3000)-2550=0{,}85v_n+2550-2550=0{,}85v_n$: la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85. **(1,5)**

2. $v_0=a_0-3000=200-3000=-2800$ **(0,25)** donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times q^n=-2800\times 0{,}85^n$ **(0,5)**

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=v_n+3000=-2800\times 0{,}85^n+3000$ **(0,25)**

4.
```
a=200                    (0,25)
for i in range(1,13):    (0,25)
    a=0.85*a+450
print(a)
```

Partie B :(7,5)

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété « $0\le u_n\le u_{n+1}\le 4$ » **(0,25)**

   Initialisation : pour $n=0$, $u_0=1$ **(0,25)** ; $u_1=\frac{5u_0+4}{u_0+2}=\frac{9}{3}=3$ **(0,25)**et $0\le 1\le 3\le 4$ donc $0\le u_0\le u_1\le 4$ **(0,25)**. La propriété $P(0)$ est vraie. **(0,25)**

   Hérédité : soit *k* un entier naturel.**(0,25)** On suppose que $P(k)$ est vraie, on va démontrer que $P(k+1)$ est vraie aussi.**(0,25)**

En utilisant l'hypothèse de récurrence on a : $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ **(0,25)** et comme la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ **(0,25)** on a $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$ **(0,25)**

Or $f(0)=2$ **(0,25)** et $f(4)=4$ **(0,25)** donc $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ **(0,25)**.

De plus $0 \leq 2$ donc $0 \leq 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ **(0,25)** soit $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$: la propriété $P(k+1)$ est vraie.**(0,25)**

Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ **(0,75)**

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$ **(0,25)** donc la suite (u_n) est majorée par 4 **(0,25)** et $u_n \leq u_{n+1}$ **(0,25)** donc la suite (u_n) est croissante **(0,25)** donc d'après le théorème de convergence monotone **(0,25)**, la suite (u_n) est convergente.

3. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ **(0,25)** donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ **(0,25)**, d'après les règles sur le produit des limites, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \times 0 = 0$ **(0,25)**. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$ **(0,25)** donc d'après le théorème des gendarmes **(0,25)**, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - u_n = 0$ **(0,25)** ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$ **(0,25)**

Exercice 5 : (4 points)

Soit *X* la variable aléatoire qui compte le nombre d'oiseaux bagués sur un échantillon de 280 oiseaux. **(0,25)**

Si on suppose que l'affirmation de l'organisation gouvernementale est vraie.

L'expérience consiste à observé un oiseau et regarder s'il est bagué. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli : il y a « succès » si l'oiseau est bagué, la probabilité de succès est $p=0{,}6$.**(0,25+0,25)**
Cette expérience est répétée 280 fois de façon identique et indépendante, la variable aléatoire *X* suit donc la loi binomiale de paramètre $n=280$ et $p=0{,}6$.**(0,25+0,25+0,25)**

On va chercher l'intervalle de fluctuation centré au seuil de 99%.

$\alpha=0{,}01$ donc $\frac{\alpha}{2}=0{,}005$ et $1-\frac{\alpha}{2}=0{,}995$ **(0,25+0,25)**

On cherche alors le plus petit entier *a* tel que $p(X \leq a) > 0{,}005$ et le plus petit entier *b* tel que $p(X \leq b) \geq 0{,}995$. On utilise alors la table des valeurs de $p(X \leq k)$ pour *k* compris entre 0 et 280.

On a $p(X \leq 146) \approx 0{,}0046 < 0{,}005$ et $p(X \leq 147) \approx 0{,}0065 > 0{,}005$ donc $a=147$ **(0,75)** et $p(X \leq 188) \approx 0{,}994 < 0{,}995$ et $p(X \leq 189) \approx 0{,}996 > 0{,}995$ donc $b=189$ **(0,75)**.

L'intervalle de fluctuation centré au seuil de 99% associé à *X* est $[147 ; 189]$.

Cela signifie qu'il a plus de 99% de chance pour que le nombre d'oiseaux bagués observés dans l'échantillon de 280 oiseaux se situe entre 147 et 189. **(0,25)**

Or $120 \notin [147 ; 189]$ **(0,25)** donc on peut en conclure que l'affirmation de l'organisation gouvernementale n'est pas vraie.