Contrôle Terminale – Chap 3 – Limites et dérivation

<u>Exercice 1 :</u> QCM (2 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

<u>Question 1 :</u>

Que vaut $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 b. 0 c. $\dfrac{1}{2}$ d. $+\infty$

<u>Question 2 :</u>

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x e^{x^2}$. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f. Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1+2x^2)e^{x^2}$ b. $4xe^{x^2}$ c. $2x(3+2x^2)e^{x^2}$ d. 0

<u>Exercice 2 :</u> (6,75 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}$.

1. Calculer la limite de f en 0.

2. Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{3x^2-1}{2x^2\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}}$.

3. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ et que le trinôme $3x^2-1$ a le tableau de signes ci-dessous sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$3x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Exercice 3 : **(18 points)**

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-2x^3+x^2-1$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. On admet que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. On donne $\alpha\approx-0{,}66$. En déduire, sans justifier, le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel $x>1$, on a $1<x<x^2<x^3$.
2. En déduire que, pour tout réel $x>1$, on a $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$.
3. Vérifier que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $4x^3e^{-2x+1}=\frac{e}{2}\times\frac{(2x)^3}{e^{2x}}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1}=0$.
5. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. En utilisant les questions précédentes, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
6. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)\times e^{-2x+1}$.
7. A l'aide des résultats de la partie A, déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (inutile de dresser son tableau de variation).

Exercice 4 : **(4,75 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{x^2+x-6}{2x-2}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

On donne la définition suivante : une droite d'équation $y=mx+p$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+p))=0$.

2. On admet que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=\frac{1}{2}x+1-\frac{4}{2x-2}$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique dont on précisera une équation.

<u>Exercice 5 :</u> (8,5 points)

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus. Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40% la proportion de chats porteurs de la maladie. On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire. Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90% des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85% des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

3. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

4. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

5. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.

6. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

7. Calculer $p(X \geq 10)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

8. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

9. Déterminer le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) > 0{,}95$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction

<u>Exercice 1 :</u> QCM (2 points)

1. Réponse c : $\dfrac{1}{2}$ 2. Réponse c : $2x(3+2x^2)e^{x^2}$

<u>Exercice 2 :</u> (6,75 points)

1. $\lim\limits_{x\to 0} 3x+2=3\times 0+2=2$ **(0,5)** ; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ **(0,25)** donc d'après les règles sur la somme des limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3x+2+\dfrac{1}{x}=+\infty$ **(0,25)**. De plus $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X}=+\infty$ **(0,25)** donc par composition $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ **(0,25)**.

2. On pose $u(x)=3x+2+\dfrac{1}{x}$, on a alors $u'(x)=3+\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=\dfrac{3x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3x^2-1}{x^2}$

   (1,25 : 0,25 deriv fonct aff, 0,25 deriv 1/x, 0,25 deriv somme, 0,5 même denom)

   Ainsi, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=\sqrt{u(x)}$ donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ **(0,25)**

   $$f'(x)=\frac{\dfrac{3x^2-1}{x^2}}{2\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}}=\frac{3x^2-1}{x^2}\times\frac{1}{2\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}}=\frac{3x^2-1}{2x^2\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}}$$ **(ap formu 0,25+0,25)**

3. Pour tout $]0;+\infty[$, $x^2>0$ et $2>0$ **(0,25)** donc $2x^2>0$ **(0,25)**.

   Pour tout $]0;+\infty[$, $\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}>0$ **(0,25)**.

   On a donc le tableau de variation ci-dessous :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$3x^2-1$		$-$	0	$+$	
$2x^2$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{3x+2+\frac{1}{x}}$	$\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2+2\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

(2,5 : 0,25 signe de $3x^2-1$ sur $[0;+\infty[$, 0,5 signe de f' , 0,5 variation de f , 0,25*2 double barre f et f' , 0,25 image, 0,25*2 limites)

<u>Exercice 3 :</u> (18 points)

Partie A

1. $g(x)=-2x^3+x^2-1=x^3(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})$ **(0,75)**

   $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$ **(0,25)** donc $\lim_{x\to-\infty}-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=-2+0-0=-2<0$ **(0,5+0,25 signe)**

   De plus $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ **(0,25)** donc d'après les règles sur le produit des limites $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ **(0,25)**

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=-2\times3x^2+2x=-6x^2+2x$ **(0,5)**

   $\Delta=2^2-4\times(-6)\times0=4>0$ **(0,25)** donc le trinôme $-6x^2+2x$ admet deux racines qui sont $x_1=\frac{-2-\sqrt{4}}{2\times(-6)}=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}$ et $x_1=\frac{-2+\sqrt{4}}{2\times(-6)}=\frac{0}{-12}=0$ **(0,25+0,25)**

   De plus $a=-6<0$ **(0,25)**, on a donc le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{26}{27}$	$\searrow$	$-\infty$

(2 : 0,5 signe de g' , 0,5 variation de g , 0,5 image, 0,5 limites)

3. D'après le tableau de variation, on en déduit le tableau de signe ci-dessous :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

(0,75)

Partie B

1. $x>1$ et $x>0$ **(0,25)** donc $x\times x>1\times x$ soit $x^2>x$ **(0,25)** et donc $x^2\times x>x\times x$ soit $x^3>x^2$ **(0,25)**, par transitivité on a $1<x<x^2<x^3$ **(0,25)**.

2. Pour tout réel $x>1$, $0<1<x<x^2<x^3$ donc en particulier $0<1<x^3$, $0<x<x^3$, $0<x^2<x^3$ et $0<x^3\leq x^3$ **(0,5)** donc par addition des quatre inégalités **(0,25)**, $0<1+x+x^2+x^3<4x^3$ **(0,25)** . De plus $e^{-2x+1}>0$ **(0,25)** donc $0\times e^{-2x+1}<(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}<4x^3e^{-2x+1}$ **(0,25)** soit $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\frac{e}{2}\times\frac{(2x)^3}{e^{2x}}=\frac{(2x)^3}{2}\times\frac{e}{e^{2x}}=\frac{8x^3}{2}\times\frac{e^1}{e^{2x}}=4x^3e^{1-2x}$ **(1)**.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $2>0$ **(0,25)** donc d'après les règles sur le produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ **(0,25)**.

   Ensuite, d'après la propriété de croissance comparée **(0,25)** $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^3}=+\infty$ **(0,25)** donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{(2x)^3}=+\infty$ **(0,25)**.

   Enfin $\frac{(2x)^3}{e^{2x}}=\frac{1}{\frac{e^{2x}}{(2x)^3}}$ **(0,25)** et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$ **(0,25)** donc d'après les règles sur le quotient des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x)^3}{e^{2x}}=0$ **(0,25)** donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{2}\times\frac{(2x)^3}{e^{2x}}=\frac{e}{2}\times 0=0$ **(0,25)** ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1}=0$.

5. $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$ **(0,25)**, $\lim\limits_{x\to+\infty} 0=0$ **(0,25)** et $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1}=0$ **(0,25)** donc d'après le théorème des gendarmes **(0,25)**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **(0,25)**. On peut en déduire que la droite d'équation $y=0$ **(0,25)** est une asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ **(0,25)**.

6. On pose $u(x)=1+x+x^2+x^3$ donc $u'(x)=1+2x+3x^2$ **(0,5)**

   et $v(x)=e^{-2x+1}$ donc $v(x)=-2\times e^{-2x+1}$ **(0,5)**

   On a donc $f'(x)=(1+2x+3x^2)\times e^{-2x+1}+(1+x+x^2+x^3)\times(-2e^{-2x+1})$ **(0,5)**

   $f'(x)=e^{-2x+1}(1+2x+3x^2-2(1+x+x^2+x^3))=e^{-2x+1}(1+2x+3x^2-2-2x-2x^2-2x^3)$

   donc $f'(x)=(-2x^3+x^2-1)e^{-2x+1}=g(x)\times e^{-2x+1}$ **(0,75: 0,5 facto, 0,25 dvp, 0,25 red)**

7. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $e^{-2x+1}>0$ **(0,25)** donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ **(0,25)** ce qui indique d'après la partie A que la fonction f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha;+\infty[$ **(0,5+0,5)**

Exercice 4 : **(4,75 points)**

1. $\lim\limits_{x \to 1} x^2+x-6=1^2+1-6=-4<0$ et $\lim\limits_{x \to 1} 2x-2=2\times 1-2=0$ **(1 :x^n,cst, somme, signe)**

   De plus,si $x>1$ alors $2x>2$ donc $2x-2>0$ **(0,5)** donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 2x-2=0^+$ **(0,25)**

   D'après les règles sur le quotient des limites $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)=-\infty$ **(0,25)**.

   On peut en déduire que la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f . **(0,5)**.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x)-(\frac{1}{2}x+1)=\frac{-4}{2x-2}$ **(0,25)**.

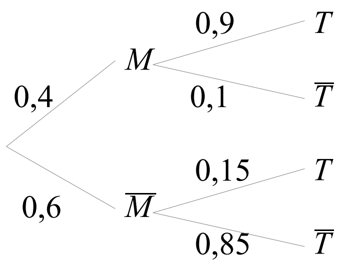
   $\lim\limits_{x \to +\infty} x=+\infty$ et $2>0$ **(0,25)** donc d'après les règles sur le produit des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x=+\infty$ **(0,25)** et $\lim\limits_{x \to +\infty} -2=-2$ **(0,25)** donc d'après les règles sur la somme des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x-2=+\infty$ **(0,25)**.

   De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} -4=-4$ **(0,25)** donc d'après les règles sur le quotient des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4}{2x-2}=0$ **(0,25)**

   Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-(\frac{1}{2}x+1))=0$ **(0,25)** : la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x+1$ **(0,25)** est donc une asymptote oblique.

<u>Exercice 5 :</u> (8,5 points)

1.



(1)

2. On cherche $p(M \cap T)$ **(0,25)** et $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36$ **(0,5)**

3. Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) = 0{,}36 + 0{,}6 \times 0{,}15$ donc $p(T) = 0{,}36 + 0{,}09 = 0{,}45$ **(0,5+1)**

4. On cherche $p_T(M)$ et $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}36}{0{,}45} \approx 0{,}8$ **(0,25+0,5)**

5. L'expérience consiste à choisir un chat et regarder s'il a un test positif. Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli : il y a « succès » si le chat a un test positif, la probabilité de succès est $p = 0{,}45$.**(0,25+0,25)**
   Cette expérience est répétée 20 fois de façon identique et indépendante, la variable aléatoire suit donc la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0{,}45$.**(0,25+0,25+0,25)**

6. $p(X = 5) \approx 0{,}036$ **(0,25+0,25)**

7. $p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0{,}409$ **(0,25+0,25)**: la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au moins 10 chats présentant un test positif est 0,409.**(0,25)**

8. $E(X) = n \times p = 20 \times 0{,}45 = 9$ **(0,5)** : Sur un échantillon de 20 chats, il y en aura en moyenne 9 qui auront un test positif **(0,25)**.

9. En utilisant la table des valeurs de $p(X \leq k)$ pour k compris entre 0 et 20 à l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice, on a : $p(X \leq 12) \approx 0{,}942 < 0{,}95$ **(0,25)** et $p(X \leq 13) \approx 0{,}979 > 0{,}95$ **(0,25)** donc le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) > 0{,}95$ est $k = 13$ **(0,25)**.
   Cela signifie que l'on a plus de 95% de chance que dans un échantillon de 20 chats, il n'y aura pas plus de 13 chats testés positif. **(0,5)**