Exercice 180 page 192

On considère une fonction f et on note C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère d'origine O.

1. Dans cette question, f est définie sur $[\,]0;+\infty[$ par $f(x)=1+\sqrt{x}$.
   (a) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la courbe C_f .
   Créer un point M sur C_f puis construire la droite (OM).
   (b) Faire une conjecture sur la limite de la pente de la droite (OM) lorsque l'abscisse x de M tend vers $+\infty$.
   (c) Démontrer cette conjecture.
   (d) Quelle est la « position limite » de la droite (OM)?

2. Reprendre la question 1. avec les fonctions définies sur $[\,]0;+\infty[$ par :
   (a) $f(x)=x^2+1$
   (b) $f(x)=2x+1+\sqrt{x}$
   (c) $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2+1}$

3. (a) Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, on dit que C_f a une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
   Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, on dit que C_f a une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
   Quelles sont parmi les courbes construites précédemment, celles qui ont de telles branches infinies ?
   (b) Dans cette question, $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$.
   Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax=+\infty$, on dit que C_f a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$.
   Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax=b$, on dit que C_f a une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax+b$.
   Quelles sont parmi les courbes construites précédemment, celles qui ont de telles branches infinies ? Justifier.

Correction

On considère une fonction f et on note C_f sa courbe dans le plan muni d'un repère d'origine O.

1. Dans cette question, f est définie sur $[\,|0;+\infty[$ par $f(x)=1+\sqrt{x}$.

   (a) Faire et observer les constructions sur Geogebra.

   (b) Il semble que la limite de la pente de la droite (OM) lorsque l'abscisse de M tend vers $+\infty$ tende vers 0.

   (c) $pente\,de(OM)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0(limite\,usuelle)$.

   (d) La « position limite » de la droite (OM) est l'axe (Ox).

2.

   (a) Pour la fonction f définie sur $[\,|0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+1$, il semble que la limite de la pente tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty(limite\,usuelle)\ .$$

   La « position limite » de la droite (OM) est l'axe (Oy).

   (b) Pour la fonction f définie sur $[\,|0;+\infty[$ par $f(x)=2x+1+\sqrt{x}$, il semble que la limite de la pente tende vers 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1+\sqrt{x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2(somme\,de\,limites\,usuelles)\ .$$

   La « position limite » de la droite (OM) est la droite d'équation $y=2x$.

   (c) Pour la fonction f définie sur $[\,|0;+\infty[$ par $f(x)=2x+1+\frac{1}{x^2+1}$, il semble que la limite de la pente tende vers 2 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x+1+\frac{1}{x^2+1}\right)-(1+1)}{x}\ .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x+1+\frac{1}{x^2+1}-2\right)}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\frac{1}{x^2+1}-1\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{1}{x}\right)=2\,(somme\ de\ limites)$$

La « position limite » de la droite (OM) est la droite d'équation $y=2x+1$.

3. (a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0\,(somme\ de\ limites\ usuelles)$ donc C_f admet une branche parabolique de direction (Ox).

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=+\infty\,(somme\ de\ limites\ usuelles)$ donc C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).

(b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1+\sqrt{x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\,(somme\ de\ limites\ usuelles)$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1+\sqrt{x}-(2x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{x}\right)=+\infty\,(somme\ de\ limites\ usuelles)$$

donc C_f admet une branche parabolique de direction $y=2x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1+\frac{1}{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x^2+1)}\right)=2\,(somme\ de\ limites)\ \text{et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1+\frac{1}{x^2+1}-(2x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)=1\,(somme\ de\ limites)$$

donc C_f admet une branche parabolique de direction $y=2x+1$.

Quelles sont parmi les courbes construites précédemment, celles qui ont de telles branches infinies ? Justifier.