Chapitre 6 : Vecteurs, droites et plans de l'espace

I. Vecteurs de l'espace

1. Notion de vecteur de l'espace

Les définitions et les calculs sur les vecteurs du plan peuvent être étendus à l'espace.

Définition : Deux points A et B étant distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

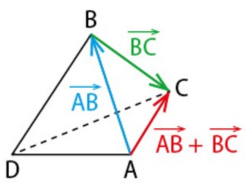
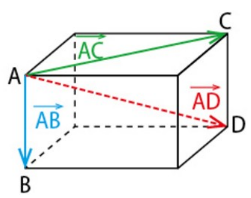
- sa direction : celle de la droite (AB)
- son sens : de A vers B
- sa norme notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ (qui est la longueur AB).

Propriétés : Étant donnés quatre points A, B, C et D de l'espace :

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme
- D est l 'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$

2. Somme de deux vecteurs

Définition : La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ qui peut s'obtenir par :

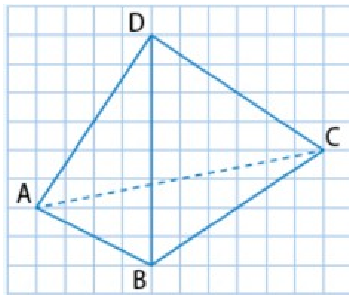
La relation de Chasles	La règle du parallélogramme
	

3. Produit d'un vecteur par un réel et colinéarité

Définition : Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est défini par :

- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction
- si $k>0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens, sinon,, ils sont de sens contraires
- $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$

Exercice 1 :

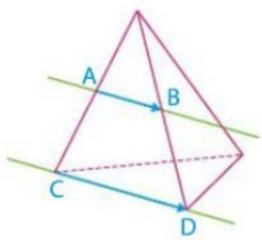


1. Reproduire le tétraèdre ABCD sur une feuille quadrillée.
2. Placer le point R tel que $\overrightarrow{DR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.
3. Placer le point S tel que $\overrightarrow{AS}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Propriétés :
(1) Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi ils ont la même direction
(2) Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$
(3) Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur

Propriétés :
(1) Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
(2) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

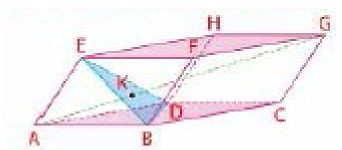
Exemple :
Ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Exercice 2 :

ABCDEFGH est un parallélépipède et K défini par $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

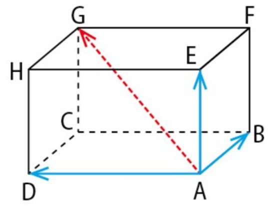
a) Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AK}$
b) En déduire que A, K et G sont alignés



4. Combinaisons linéaires de vecteurs

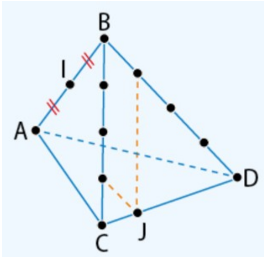
Définition : Étant donnés trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on dit que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $\vec{u}=a\vec{v}+b\vec{w}$.

Remarque : cette définition se généralise à combinaison linéaire de plusieurs vecteurs.



Exemple : Dans le pavé droit ci-contre, on peut écrire $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. En effet, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Exercice 3 :
Dans le tétraèdre ABCD ci-contre, I est le milieu de [AB].



1. En utilisant les codages de la figure, exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Définition : Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ son dits linéairement indépendants s'il n'est pas possible d'exprimer l'un comme combinaison linéaire des deux autres.

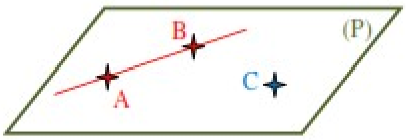
Propriété : Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ son dits linéairement indépendants si et seulement si l'égalité $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ implique $a=b=c=0$.

II. Droites et plans de l'espace

1. Règles d'incidence

Propriété : Dans chaque plan de l'espace, les résultats de géométrie plane s'appliquent.

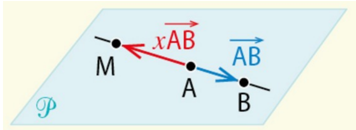
Propriétés :
- Par deux points distincts A et B, il passe une seule droite notée (AB).
- Par trois points non alignés A, B et C, il passe un seul plan noté (ABC).
- Si deux points distincts A et B appartiennent à un plan (P) alors la droite (AB) est contenue dans le plan (P).



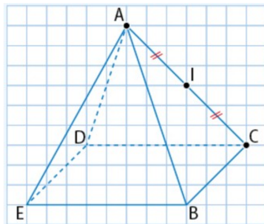
2. Caractérisation vectorielle d'une droite

Définition : On appelle vecteur directeur d'une droite *d* tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite *d*.

Propriétés :
Étant donné deux points A et B distincts de l'espace, la droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, autrement dit, la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ avec $x\in\mathbb{R}$.



Exercice 4 :
Dans la pyramide ABCDE de sommet A et de base le parallélogramme BCDE, on considère le point I milieu de[AC].



1. Reproduire la figure et placer G tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{EI}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire l 'alignement des points E, I et G .

3. Caractérisation vectorielle d'un plan

Définition : On appelle direction d'un plan, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts du plan.

Propriété : Étant donnés deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la direction d'un plan P , tout vecteur directeur de la direction de P est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

<u>A savoir</u> : On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent la direction de P .

Propriétés : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace (E).
L'ensemble $P=\{M\in(E)/\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}\}$ avec x, y réels est un plan passant par A.

Preuve :
Soit B et C tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.
Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, pour tout point M du plan (ABC), il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$.
Réciproquement, soit x et y deux réels et M le point de l'espace défini par $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$.
Le point R défini par $\overrightarrow{AR}=x\vec{u}$ appartient à la droite (AB) donc au plan (ABC).
Comme $\overrightarrow{RM}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AM}=-x\vec{u}+x\vec{u}+y\vec{v}=y\vec{v}$, M appartient à la parallèle à (AC) passant par R.
Cette droite est incluse dans le plan (ABC) donc M appartient au plan (ABC). #

<u>A savoir</u> : Un plan est entièrement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

4. Vecteurs coplanaires et applications

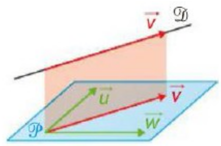
Définition : Des vecteurs sont coplanaires ssi leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Propriété :

1. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe trois réels a, b et c non tous nuls tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$.

2. Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires ssi l'égalité $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ implique $a=0, b=0 \text{ et } c=0$

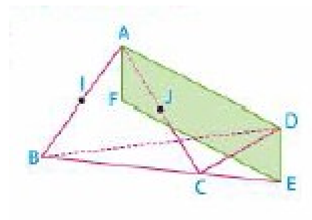
<u>A savoir</u> : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $\vec{w}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Exercice 5 :
ABCDEFGH est un parallélépipède. R est le milieu de [EF] et S est le milieu de [EH].
Les points T et U sont définis par $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Calculer $9\overrightarrow{TU}+6\overrightarrow{TS}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires.
4. Que peut-on en déduire des points T, U, R et S ?

Exercice 6 :
ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J celui de [AC].
E et F sont définis par $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$.



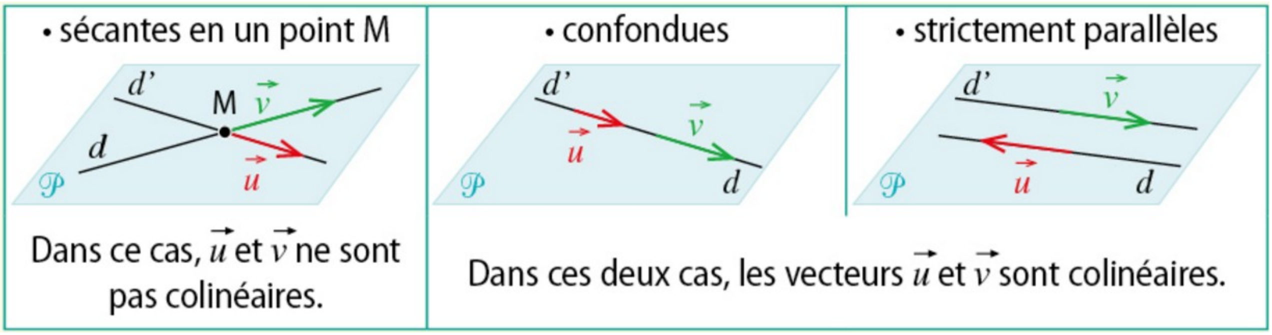
a) Exprimer $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ en fonction de $\overrightarrow{DI}$.
b) Démontrer que $\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IJ}$.
c) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ} \text{ et } \overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.
d) Que peut-on dire des points D, I, J et F ?

III. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1. Positions relatives de deux droites

Propriété : Étant donné une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ de l'espace et une droite (d') de vecteur directeur $\vec{v}$ de l'espace, les droites (d) et (d') peuvent être coplanaires ou non coplanaires.

(1) Si (d) et (d') sont coplanaires alors elles peuvent être :



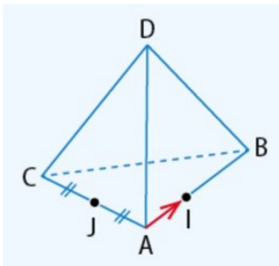
(2) si (d) et (d') ne sont pas coplanaires alors elles n'ont aucun point commun.

Remarque : dans l'espace, deux droites n'ayant aucun point commun sont soit strictement parallèles soit non coplanaires.

Propriété : Par tout point de l'espace, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

Exercice 7 :

On considère un tétraèdre ABCD et le point I défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point J milieu de [AC].



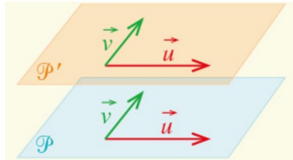
1. Démontrer que (IJ) et (BC) sont sécantes.
2. Par un raisonnement par l'absurde, démontrer que (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.

2. Positions relatives de deux plans

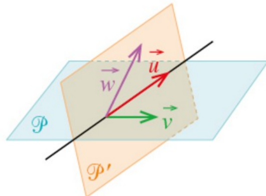
Définition : Deux plans sont parallèles lorsqu'ils ont la même direction.

Propriété : Deux plans (P) et (P') sont parallèles lorsqu'ils sont confondus ou n'ont aucun point commun.

Propriété : Deux plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de la direction de (P) sont respectivement égaux à deux vecteurs de la direction de (P').

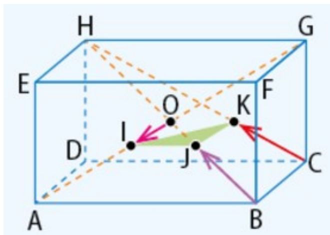


Conséquence : deux plans de l'espace sont sécants si et seulement si ils ne sont pas parallèles.Dans ce cas, ils se coupent selon une droite.



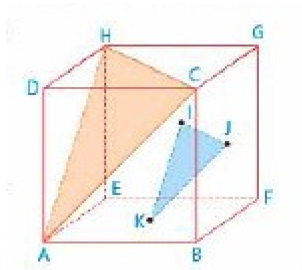
Propriété : Par tout point de l'espace, il passe un unique plan parallèle à un plan donné.

Exercice 8 :
On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH de centre O et les points I, J et K définis par $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}$.



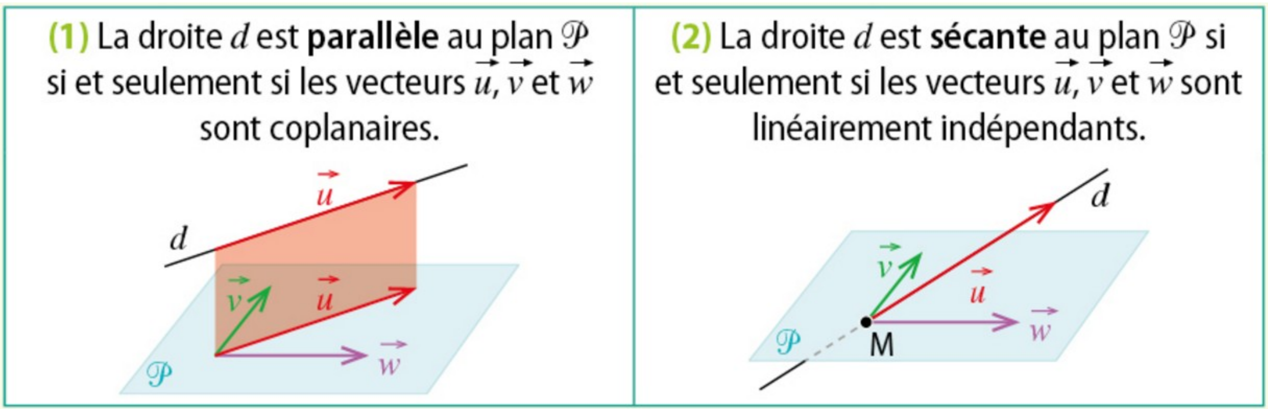
1. Démontrer que (IJ) et (AB) sont parallèles.
2. Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BH}$.
3. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 9 :
ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les centres respectifs des faces EFGH, BFGC et ABFE. Démontrer que les plans (IJK) et (ACH) sont parallèles.



3. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété : Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de base $(\vec{v};\vec{w})$.



Remarque : lorsque (d) et (P) sont sécants alors les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ *engendrent les vecteurs de l'espace. On dit que* $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ *est une base de l'espace.*

Propriété : Une droite (d) est parallèle à un plan (P) si et seulement si (d) est incluse dans (P) ou (d) et (P) n'oint aucun point commun.

IV. Bases et repères de l'espace

1. Décomposition d'un vecteur dans une base

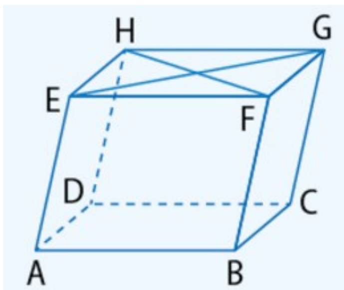
Définition : Une base de l'espace est un triplet de vecteurs non coplanaires .

Propriété : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
Il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Le triplet (x, y, z) sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Preuve :
<u>Existence</u> : On considère deux points O et M de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
On considère le plan (P) passant par O et de base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Comme $\vec{k}$ *n'est pas coplanaire avec* $\vec{i}$ et $\vec{j}$ *alors la droite (d) passant par M et de vecteur directeur* $\vec{k}$ *coupe le plan (P) en un point N.*
Ainsi le vecteur $\overrightarrow{ON}$ *est un vecteur du plan (P) donc il existe un couple de réels* $(x ; y)$ *tels que* $\overrightarrow{ON} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
M et N dont deux points de (d) donc il existe un réel z *tel que* $\overrightarrow{MN} = z\vec{k}$.
On déduit $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + NM = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

<u>Unicité</u> : Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ *alors* $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$.
Comme $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ *ne sont pas coplanaires alors* $x = x', y = y'$ et $z = z'$. #

Exercice 10 : ABCDEFGH est un parallélépipède et O est le centre du parallélogramme EFGH.



1. Déterminer une base du plan (ABC).
2. Justifier que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OH})$ est une base de (ABC).
3. Compléter la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OH})$ en une base de l'espace.
4. $(\overrightarrow{GO}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CE})$ est-elle une base de l'espace ? Justifier.
5. Décomposer $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{OH}$ dans la base $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$ du plan (EFH).
6. Décomposer $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AO}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ de l'espace.

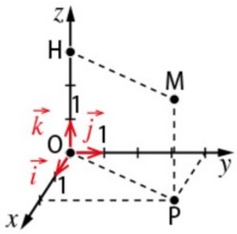
2. Repère de l'espace

Définition : Un repère de l'espace est un quadruplet $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec O point de l'espace appelé origine du repère et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de l'espace.

Définition : Étant donné un point M de l'espace, ses coordonnées dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont les coordonnées (x,y,z) du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Remarque : (x,y,z) sont respectivement appelées abscisse, ordonnée et côte de M.

Exemple : dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, M a pour coordonnées $(2;4;3)$.



Propriété : Soit deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(1) $\vec{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

(2) $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ est le milieu de $[AB]$.

V. Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Propriété : Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

$$M(x;y;z)\in(D)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\text{ tel que}\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$$

Preuve :

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. On a $\vec{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A)$.

$$M(x;y;z)\in(D)\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\text{ tel que }\vec{AM}=t\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_A=ta\\y-y_A=tb\\z-z_A=tc\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}$$

#

Définition : Soit x_0 , y_0 , z_0 , a , b , c des réels tels que (a;b;c) ≠ (0;0;0).

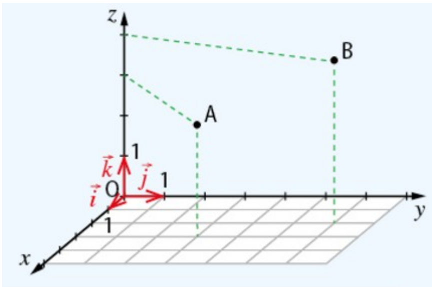
Le système d'équations $\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \\ z=z_0+tc \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ définit une représentation paramétrique de la droite

(D) passant par le point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

Le réel t est appelé le paramètre du point M.

Remarque : une droite n'a pas une unique représentation paramétrique car ni le point A ni le vecteur directeur u ne sont uniques.

Exercice 12 :



1. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,lire les coordonnées de A et de B.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Déterminer deux représentations paramétriques de (AB) dans ce repère.

Exercice 13 :

Soit $\begin{cases} x=5-t \\ y=-1+3t \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ une représentation paramétrique d'une droite (d) de l'espace.

1. $A(3;5;-2)$ appartient-il à (d) ?
2. Donner les coordonnées d'un point de (d) ainsi que celles d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d).
3. (d) est-elle parallèle à (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x=6+2t' \\ y=1-6t' \\ z=-5-2t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$?

Exercice 14 :

Soit $(d):\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et $(d'):\begin{cases} x=1-3t' \\ y=1+t' \\ z=2-5t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$ deux droites de l'espace.

Démontrer que (d) et (d') sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 15 :

Soit $A(2;-1;4), B(6;-7;0), C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$ quatre points de l'espace dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Démontrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 16 :

Soit $\vec{u}(1;-3;5), \vec{v}(4;2;1)$ et $\vec{w}(0;2;-1)$ trois vecteurs de l'espace dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base d'un plan.
2. Démontrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}(-1;-15;16)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.