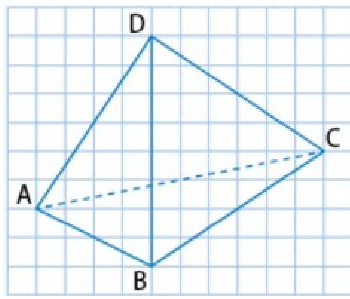
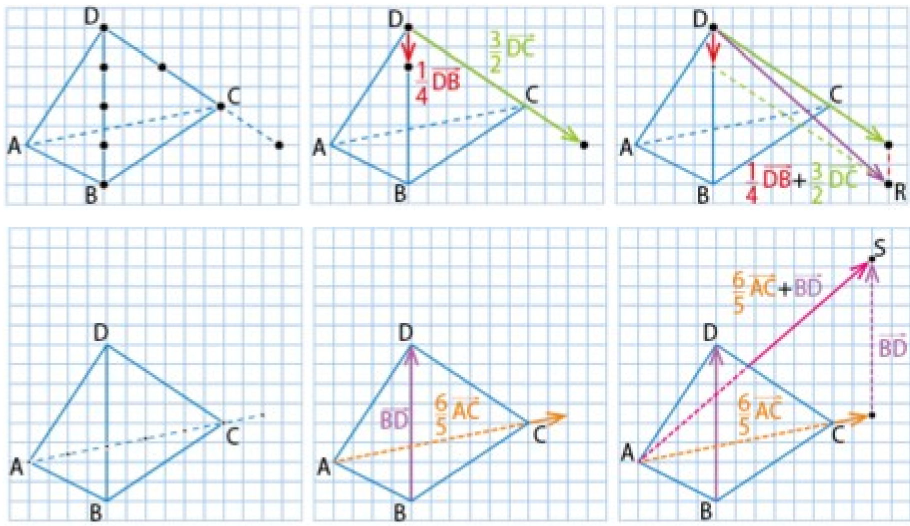
Exercice 1 :



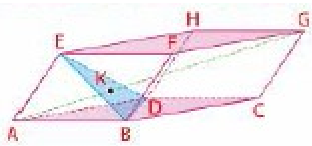
1. Reproduire le tétraèdre ABCD sur une feuille quadrillée.
2. Placer le point R tel que $\overrightarrow{DR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.
3. Placer le point S tel que $\overrightarrow{AS}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Correction



Exercice 2 :

ABCDEFGH est un parallélépipède et K défini par $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$



a) Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AK}$
b) En déduire que A, K et G sont alignés

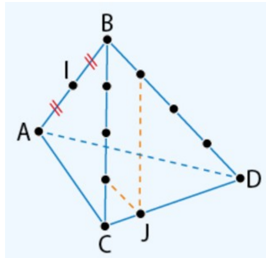
Correction

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})+(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD})+(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KE})=3\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KE}$ (Chasles)
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE}$ (Chasles)

Or $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$ donc $3\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE}$ d'où
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{AK}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AK}$. Or $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$ d'après la règle du parallélogramme
donc $3\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AG}$ donc les points A, C et G sont alignés.

Exercice 3 :
Dans le tétraèdre ABCD ci-contre, I est le milieu de [AB].



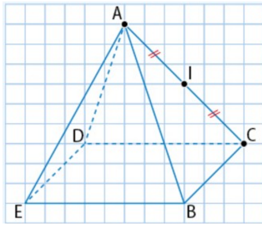
1. En utilisant les codages de la figure, exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{IB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
3. En déduire $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Correction

1. $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$
2. I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
3. $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ donc
$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc
$\overrightarrow{IJ}=(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{4})\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

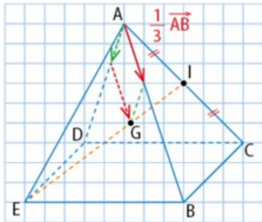
Exercice 4 :

Dans la pyramide ABCDE de sommet A et de base le parallélogramme BCDE, on considère le point I milieu de[AC].



1. Reproduire la figure et placer G tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{EI}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire l 'alignement des points E, I et G .

Correction



1.
2. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

   donc $\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$

3. $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})$ (règle du parallélogramme)

   $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED}))$ (règle du parallélogramme)

   $\overrightarrow{EI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$

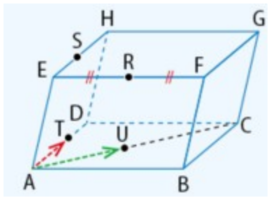
   $\overrightarrow{EI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

   $\overrightarrow{EI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

4. On déduit que $\frac{3}{2}\overrightarrow{EG}=\frac{3}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EI}$

   donc les points E, G et I sont alignés.

Exercice 5 :
ABCDEFGH est un parallélépipède. R est le milieu de [EF] et S est le milieu de [EH].
Les points T et U sont définis par $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



1. Exprimer $\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Calculer $9\overrightarrow{TU}+6\overrightarrow{TS}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires.
4. Que peut-on en déduire des points T, U, R et S ?

Correction

1. $\overrightarrow{TU}=\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AU}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

   $\overrightarrow{TU}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ car ABCD parallélogramme

   $\overrightarrow{TU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

   $\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ car ABEF parallélogramme

   $\overrightarrow{TR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

   $\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ES}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ car ADHE parallélogramme

   $\overrightarrow{TS}=-\frac{4}{6}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

2. $9\overrightarrow{TU}+6\overrightarrow{TS}=3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}+6\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AD}+6\overrightarrow{AE}=6\overrightarrow{TR}$

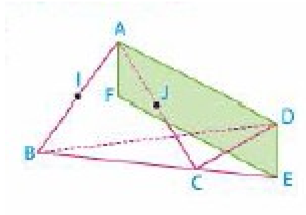
3. $9\overrightarrow{TU}+6\overrightarrow{TS}=6\overrightarrow{TR}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires.

4. Les vecteurs $\overrightarrow{TU}, \overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ sont coplanaires donc le spoints T, R, U et S sont coplanaires.

Exercice 6 :

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J celui de [AC].

E et F sont définis par $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$.



a) Exprimer $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ en fonction de $\overrightarrow{DI}$.
b) Démontrer que $\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IJ}$.
c) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}\ et\ \overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.
d) Que peut-on dire des points D, I, J et F ?

Correction

On a :

- $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}\Leftrightarrow AFED$ parallélogramme .
- I et J milieux respectifs de [AB] et [AC] donc $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$.

a) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DI}$ car ADEF parallélogramme.

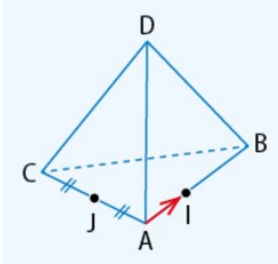
b) $\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$ d'après le a).
$\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$ car ADEF parallélogramme
$\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\times 2\overrightarrow{IJ}=3\overrightarrow{IJ}$

c) $\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DJ})$ d'après la relation de chasles
$\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{ID}+3\overrightarrow{DJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}+3\overrightarrow{DI}-3\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$
$\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DI}-3\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$
$\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DI}-3\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}\ et\ \overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}\ et\ \overrightarrow{DF}$ sont coplanaires donc les points D, I, J et F sont coplanaires.

Exercice 7 :

On considère un tétraèdre ABCD et le point I défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et le point J milieu de [AC].



1. Démontrer que (IJ) et (BC) sont sécantes.
2. Par un raisonnement par l'absurde, démontrer que (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.

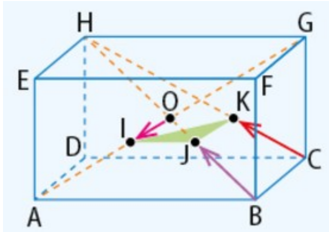
Correction

1. Les droites (IJ) et (BC) sont incluses dans le plan (ABC) donc sont coplanaires.
   Or, $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\neq\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc I n'est pas le milieu de $[AB]$.
   Comme J est le milieu de $[AC]$, on déduit que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (IJ) et (BC) ne sont pas parallèles donc sont sécantes.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que (IJ) et (AD) sont parallèles.
   Alors, (IJ) et (AD) sont coplanaires donc D appartient au plan (ABC) ce qui est impossivble car ABCD est un tétraèdre donc l'hypothèse (IJ) parallèle à (AD) est fausse donc (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.

Exercice 8 :

On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH de centre O et les points I, J et K définis par $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}$.



1. Démontrer que (IJ) et (AB) sont parallèles.
2. Exprimer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BH}$.
3. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Correction

1. $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$

   $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}OA=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

2. $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}=(\frac{2}{3})\times(\frac{1}{2})\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$ avec O milieu de [BH].

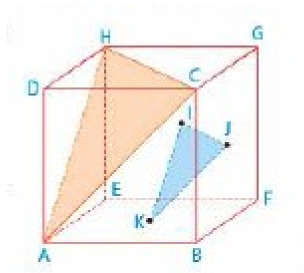
3. On a $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ d'après le 1. et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$ d'après le 2. et $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}$ par hypothèse.

   On déduit que :

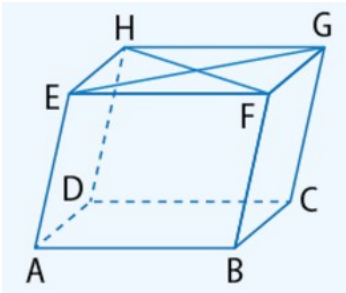
   $\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

   On a $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires et $\overrightarrow{JK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires.

   $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (IJK), non colinéaires.
   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC), non colinéaires.
   $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
   On déduit que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 9 : ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les centres respectifs des faces EFGH, BFGC et ABFE. Démontrer que les plans (IJK) et (ACH) sont parallèles. 
Correction I et J sont les milieux respectifs de [FH] et [FC] donc les droites (IJ) et (CH) sont parallèles d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle (FCH). De même, I et K sont les milieux respectifs de [FC] et [FA] donc les droites (IK) et (CA) sont parallèles d'après la propriété de la droite des milieux dans le triangle (FCA). On a donc trouvé deux drotes sécantes dans le plan (IJK) respectivement parallèles à deux droites sécantes du plan (ACH) donc les plans (IJK) et (ACH) sont parallèles.

Exercice 10 : ABCDEFGH est un parallélépipède et O est le centre du parallélogramme EFGH.



1. Déterminer une base du plan (ABC).
2. Justifier que $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OH})$ est une base de (ABC).
3. Compléter la base $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OH})$ en une base de l'espace.
4. $(\overrightarrow{GO},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{CE})$ est-elle une base de l'espace ? Justifier.
5. Décomposer $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{OH}$ dans la base $(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH})$ du plan (EFH).
6. Décomposer $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AO}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ de l'espace.

Correction

1. A, B et C sont trois points non aloignés du plan (ABC) donc $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ forment une base du plan (ABC).

2. $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Or, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont deux vecteurs du plan (ABC) non colinéaires donc $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OH})$ forment une base de (ABC).

3. E n'étant pas un point du plan (ABC), on déduit que $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OH},\overrightarrow{AE})$ forment une base de l'espace.

4. On a $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{GO}-\overrightarrow{FB}$ donc $(\overrightarrow{GO},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{CE})$ ne sont pas linéairement indépendants donc $(\overrightarrow{GO},\overrightarrow{FB},\overrightarrow{CE})$ ne forment pas une base de l'espace.

5. $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG})=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH})=-\frac{1}{2}EF+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$

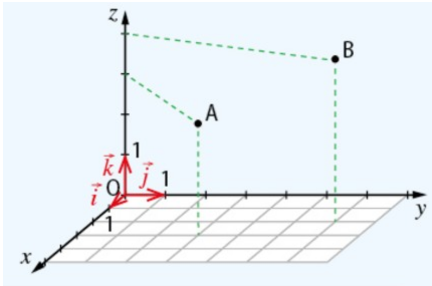
6. $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH})=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

Exercice 12 :

1. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace,lire les coordonnées de A et de B.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Déterminer deux représentations paramétriques de (AB) dans ce repère.



Correction

1. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on lit $A(3;3;3)$ et $B(2;6;4)$.

2. $\overrightarrow{AB}(-1;-3;1)$

3. $\overrightarrow{AB}$ est directeur de la droite (AB), A et B sont deux points distincts de la droite (AB). On déduit deux représentations paramétriques de la drote (AB).

$$\begin{cases} x=3-t \\ y=3-3t \\ z=3+t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x=2-t' \\ y=6-3t' \\ z=4+t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$$

Exercice 13 :

Soit $\begin{cases} x=5-t \\ y=-1+3t \\ z=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ une représentation paramétrique d'une droite (d) de l'espace.

1. $A(3;5;-2)$ appartient-il à (d) ?
2. Donner les coordonnées d'un point de (d) ainsi que celles d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d).
3. (d) est-elle parallèle à (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x=6+2t' \\ y=1-6t' \\ z=-5-2t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$?

Correction

1. $A(3;5;-2)\in(d)\Leftrightarrow \text{il existe } t\in\mathbb{R} \text{ tel que} \begin{cases} 3=5-t \\ 5=-1+3t \\ -2=1+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

   $A(3;5;-2)\in(d)\Leftrightarrow \text{il existe } t\in\mathbb{R} \text{ tel que} \begin{cases} t=5-3=2 \\ t=\dfrac{5+1}{3}=2 \\ t=-2-1=-3\neq 2 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

   Conclusion : $A(3;5;-2)$ n'appartient pas à (d)

2. $B(5;-1;1)$ de paramètre $t=0$ appartient à la droite (d) et $\vec{u}(-1;3;1)$ est un vecteur directeur de (d).

3. $\vec{u}(-1;3;1)$ et $\vec{v}(2;-6;-2)$ sont des vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d').
   Or, $\vec{v}=-2\vec{u}$ donc $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc les droites (d) et (d') sont parallèles.

Exercice 14 :

Soit $(d):\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et $(d'):\begin{cases} x=1-3t' \\ y=1+t' \\ z=2-5t' \end{cases}, t'\in\mathbb{R}$ deux droites de l'espace.

Démontrer que (d) et (d') sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Correction

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$M(x;y;z)\in(d)\cap(d')\Leftrightarrow\begin{cases} 3+2t=1-3t' \\ -1-t=1+t' \\ 4+3t=2-5t' \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3+2t=1-3t' \\ t'=-2-t \\ 4+3t=2-5t' \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3+2t=1-3(-2-t) \\ t'=-2-t \\ 4+3t=2-5(-2-t) \end{cases}$$

$$M(x;y;z)\in(d)\cap(d')\Leftrightarrow\begin{cases} 3+2t=1+6+3t \\ t'=-2-t \\ 4+3t=2+10+5t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3+2t=7+3t \\ t'=-2-t \\ 4+3t=12+5t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=-4 \\ t'=2 \\ 2t=-8 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=-4 \\ t'=2 \\ t=-4 \end{cases}$$

Conclusion : (d) et (d') sont sécantes au point $M(-5;3;-8)$ de paramètre associé à $t=-4$.

Exercice 15 :

Soit $A(2;-1;4), B(6;-7;0), C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$ quatre points de l'espace dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Démontrer que A, B, C et D sont coplanaires.

Correction

1. $\overrightarrow{AB}(4;-6;-4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;1;-3)$.
   Or, $\frac{4}{-1}\neq\frac{-6}{1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. $\overrightarrow{AB}(4;-6;-4), \overrightarrow{AC}(-1;1;-3)$ et $\overrightarrow{AD}(11;-15;1)$.
   On cherche deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases} 4a-b=11 \\ -6a+b=-15 \\ -4a-3b=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=4a-11 \\ -6a+(4a-11)=-15 \\ -4a-3b=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=4a-11 \\ -2a-11=-15 \\ -4a-3b=1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases} b=4a-11 \\ a=2 \\ -4a-3b=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-3 \\ a=2 \\ -8+9=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=-3 \\ a=2 \end{cases}$$

Conclusion : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc A,B,C et D sont coplanaires.

Exercice 16 :

Soit $\vec{u}(1;-3;5),\vec{v}(4;2;1)$ et $\vec{w}(0;2;-1)$ trois vecteurs de l'espace dans une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base d'un plan.
2. Démontrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de l'espace.
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}(-1;-15;16)$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Correction

1. $\frac{4}{1}=4$ mais $\frac{2}{-3}\neq 4$ donc les vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ ne sont pas colinéaires donc forment une base d'un plan.

2. Supposons qu'il existe trois réels a,b et c tels que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$.

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a+4b=0\\-3a+2b+2c=0\\5a+b-c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4b\\-3a+2b+2c=0\\c=5a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4b\\-3a+2b+2c=0\\c=-19b\end{cases}$$

$$a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4b\\-3\times(-4b)+2b+2\times(-19b)=0\\c=-19b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4b\\-24b=0\\c=-19b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

Conclusion : les trois vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ sont linéairement indépendants donc forment une base de l'espace.

3. On cherche trois réels x,y et z tels que $\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$.

$$\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y=-1\\-3x+2y+2z=-15\\5x+y-z=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-4y\\-3x+2y+2z=-15\\z=5x+y-16\end{cases}$$

$$\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-4y\\-3x+2y+2z=-15\\z=5(-1-4y)+y-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-4y\\-3x+2y+2z=-15\\z=-19y-21\end{cases}$$

$$\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-4y\\-3(-1-4y)+2y+2(-19y-21)=-15\\z=5(-1-4y)+y-16\end{cases}$$

$$\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-4y\\3+12y+2y-38y-42=-15\\z=-19y-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-4y\\-24y-39=-15\\z=-19y-21\end{cases}$$

$$\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-4y\\y=\frac{24}{-24}=-1\\z=-19y-21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\\z=-2\end{cases}$$

Conclusion : $\vec{t}=3\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}$.