

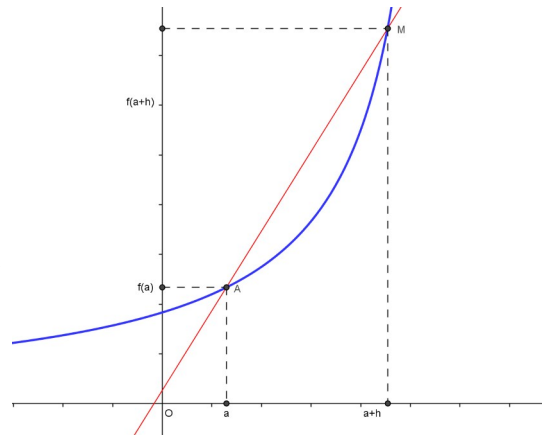
Chapitre 3 - Rappels sur la dérivation

I. Nombre dérivé et tangente

f désigne une fonction définie sur un intervalle I , C_f sa représentation graphique dans un repère du plan et $A(a ; f(a))$ un point de C_f d'abscisse a .

Soit h un nombre réel non nul et $M(a+h ; f(a+h))$ un point de C_f .

On se demande quelle position prend la droite (AM) lorsque M se rapproche de plus en plus de A c'est à dire ce que devient le coefficient directeur $r(h)$ lorsque h se rapproche de plus en plus de 0.



1. Taux d'accroissement

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$r(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition : $r(h)$ est aussi appelé le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et $a+h$.

2. Nombre dérivé de f en a

$r(0)$ n'existe pas mais on veut savoir ce que devient le coefficient directeur $r(h)$ de la droite (AM) quand h se rapproche de plus en plus de zéro. On dira qu'on s'intéresse à la limite de $r(h)$ quand h tend vers zéro et on écrira cette limite sous la forme $\lim_{h \rightarrow 0} r(h)$.

Définition :

- si $r(h)$ tend vers un **nombre réel** quand h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en a** .
- Ce nombre est appelé le **nombre dérivé de f en a** . Il est noté $f'(a)$. On écrit

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

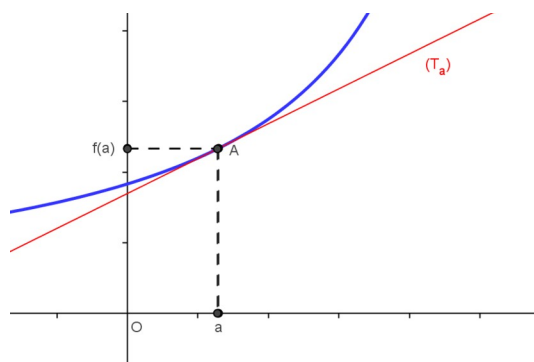
3. Tangente en un point à une courbe

Graphiquement, lorsque h tend vers 0, le point M de C_f se rapproche de plus en plus près de A .

Dire que $r(h)$ a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers 0 revient à dire que le coefficient directeur de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A sur C_f .

Définition : si f est dérivable en a , on appelle **tangente** (T_a) en A à la courbe C_f la droite qui passe par A et de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.

Propriété : une **équation de la tangente** (T_a) peut s'écrire $y = f'(a)(x - a) + f(a)$



II. Fonction dérivée

1. Fonction dérivée d'une fonction donnée

Définition :

- si f est dérivable en tout point d'un intervalle I , on dit que f est dérivable sur I
- la fonction $f : x \rightarrow f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et notée f' .

2. Dérivées des fonctions usuelles

| fonction | f | Définie et dérivable sur... | f' |
|---|--------------------|--|-----------------------------|
| (1) constante | $f(x)=b$ | \mathbb{R} | $f'(x)=0$ |
| (2) linéaire | $f(x)=ax$ | \mathbb{R} | $f'(x)=a$ |
| (3) affine | $f(x)=ax+b$ | \mathbb{R} | $f'(x)=a$ |
| (4) carré | $f(x)=x^2$ | \mathbb{R} | $f'(x)=2x$ |
| (5) cube | $f(x)=x^3$ | \mathbb{R} | $f'(x)=3x^2$ |
| (6) puissance (n est un entier naturel non nul) | $f(x)=x^n$ | \mathbb{R} | $f'(x)=nx^{n-1}$ |
| (7) inverse | $f(x)=\frac{1}{x}$ | \mathbb{R}^* | $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ |
| (8) racine carrée | $f(x)=\sqrt{x}$ | définie sur $[0;+\infty[$ dérivable sur $]0;+\infty[$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

III. Dérivées et opérations

u et v désignent deux fonctions définies sur un même intervalle I.

| intitulé | fonction | Définie et dérivable sur... | dérivée |
|--|---------------|---|------------------------|
| (1) somme de 2 fonctions | $u+v$ | I | $u'+v'$ |
| (2) produit d'une fonction par un scalaire | au | I | au' |
| (3) produit de deux fonctions | $u \times v$ | I | $u'v+v'u$ |
| (4) carré d'une fonction | u^2 | I | $2uu'$ |
| (5) inverse d'une fonction | $\frac{1}{u}$ | I et $u(x) \neq 0$ | $\frac{-u'}{u^2}$ |
| (6) quotient de deux fonctions | $\frac{u}{v}$ | I et $v(x) \neq 0$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| (7) racine carrée d'une fonction | \sqrt{u} | Définie sur I et $u(x) \geq 0$ Dérivable sur I et $u(x) > 0$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

IV. Signe de la dérivée et variations d'une fonction

1. Sens de variation

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est **croissante** sur I alors sa dérivée f' est **positive** sur I
- Si f est **décroissante** sur I alors sa dérivée f' est **négative** sur I
- Si f est **constante** sur I alors sa dérivée f' est **nulle** sur I

Propriété réciproque : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la dérivée f' est **positive** sur I alors f est **croissante** sur I
- Si la dérivée f' est **négative** sur I alors f est **décroissante** sur I
- Si la dérivée f' est **nulle** sur I alors f est **constante** sur I

Remarque : l'étude du signe de la dérivée d'une fonction permet donc de donner le sens de variation de cette fonction. On représente le signe de $f'(x)$ et les variations de f dans un tableau appelé tableau de variations de la fonction f .

V. Extremum d'une fonction

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel appartenant à I . Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en a , alors la fonction admet un **extremum** local en a .

Remarque : cet extremum peut être un maximum ou un minimum. Deux cas sont possibles :

| | | | | | | | |
|---------|-------------|---|---|---------|-------------|---|---|
| x | a | | | x | a | | |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | minimum | | | $f(x)$ | maximum | | |

Remarque : l'hypothèse du changement de signe de f' en a est nécessaire.

La fonction $x \rightarrow x^3$ n'admet pas d'extremum sur \mathbb{R} et pourtant elle a une dérivée qui s'annule en $x=0$ (mais sa dérivée ne change pas de signe).

Cas particulier : trinôme du second degré

Propriété : soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$. Cette fonction admet en $x = \frac{-b}{2a}$ un **minimum** si $a > 0$, un **maximum** si $a < 0$.