

Exercice

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 2. C_f admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser lesquelles.
 3. Calculer $f'(x)$ puis déterminer les variations de f sur $]0; +\infty[$.
 4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en $x=1$.
-

Correction

Exercice

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = +\infty$ comme quotient de limites avec :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 + 1 = 1$ (limite usuelle) et $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x^2+1} = 1 > 0$ par composition de limites
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$ (limite usuelle)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}$ est une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$. Or,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|(1+\frac{1}{x^2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x^2})}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+\frac{1}{x^2})}{x} = 0^+$ comme quotient de limites avec :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$ (limite usuelle) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{x^2}) = 1 > 0$ comme somme de limites usuelles
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ (limite usuelle)

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ donc C_f admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ donc C_f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

3. La fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. Soit $x > 0$, on a :

$f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \sqrt{x^2+1}$, $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$

$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ donc $f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times x^2 - 2x \times \sqrt{x^2+1}}{(x^2)^2} = \frac{\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2x \times (x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{(x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4 \sqrt{x^2+1}} = \frac{x(-x^2-2)}{x^4 \sqrt{x^2+1}} = \frac{-x^2-2}{x^3 \sqrt{x^2+1}}$

Or, $x > 0$ donc $-x^2-2 < 0$, $x^3 > 0$ et $\sqrt{x^2+1} > 0$ donc $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

4. Equation de la tangente T_1 à C_f en $x=1$.

$$T_1: y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ avec } f'(1) = \frac{-1^2 - 2}{1^3 \sqrt{1^2 + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{2} \text{ et } f(1) = \frac{\sqrt{1^2 + 1}}{1^2} = \sqrt{2}$$

$$T_1: y = \frac{-3\sqrt{2}}{2}(x-1) + \sqrt{2} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$T_1: y = \frac{-3\sqrt{2}}{2}x + \frac{5\sqrt{2}}{2}$$