Chapitre 5 : Compléments sur la dérivation

I. Compléments sur la dérivation

1. Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété (admise) : Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel x dans I, $u(x)$ appartient à J.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$.

2. Dérivée de la composée de fonctions u^n

Théorème : Soit n un entier non nul. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si lorsque n est strictement négatif, u^n ne s'annule pas sur I, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n u' u^{n-1}$.

Preuve : La fonction u^n est la composée de la fonction u suivi de la fonction $v : X \rightarrow X^n$.
Pour tout réel x de I, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = u'(x) \times n(u(x))^{n-1}$
avec $v'(X) = n X^{n-1}$ donc $(v \circ u)'(x) = n\, u'(x)(u(x))^{n-1}$ #

Exercice 1 :
Déterminez les dérivées des fonctions :

- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x-1)^5$
- g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{(2x^2+3)^3}$

3. Dérivées des fonctions $\sqrt{u}$

Théorème : Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Remarque : la fonction $\sqrt{u}$ est la composée de la fonction u suivie de la fonction racine carrée.

Preuve : Soit a un réel appartenant à I et h un réel tel que $a+h\in I$.

Le taux d'accroissement de la fonction $\sqrt{u}$ *entre a et a+h est égal à* $r(h)=\frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h}$

On multiplie $r(h)$ *par* $\frac{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}$.

On obtient $r(h)=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}$.

Or u *est dérivable sur I donc* $\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h}=u'(a)$ *et* $\sqrt{u}$ *est continue sur I donc*

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{u(a+h)}+\sqrt{u(a)}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ *. On déduit que* $\lim_{h\to 0}r(h)=\frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$.

Ceci étant vrai pour tout réel a de I, on déduit que $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$. #

Exercice 2 :

Déterminez la dérivée de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\sqrt{3x^2+x+5}$.

4. Dérivée de la composée de fonctions e^u

Propriété : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)'=u'e^u$.

Preuve : la fonction e^u *est la composée de la fonction* u *suivi de la fonction* $v:X\to e^X$.

Pour tout réel x *de I,* $(v\circ u)'(x)=u'(x)\times(v'\circ u)(x)=u'(x)\times v'(u(x))=u'(x)\times e^{u(x)}$

avec $v'(X)=e^X$ *donc* $(v\circ u)'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$ #

Exercice 3 :

Déterminez la dérivée de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=e^{3x^2-2x+4}$.

5. Dérivée de composée de fonctions $v(ax+b)$

Théorème : Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I et si J est un intervalle tel que pour tout réel $x\in J$, $ax+b\in I$, alors la fonction $f(x)=v(ax+b)$ est dérivable sur J et $f'(x)=a\,v'(ax+b)$

Preuve : cas particulier de la dérivée $(v\circ u)'=u'\times(v'\circ u)$ *avec* $u(x)=ax+b$ *et* $u'(x)=a$ #

Exercice 4 :

v est une fonction définie et dérivable sur ℝ , sa dérivée est v' .

f et g sont deux fonctions définies sur ℝ par $f(x)=v(2x+1)$ et $g(x)=v(-x)$.

1. Déterminez $f'(x)$ et $g'(x)$ en fonction de x et de v'
2. Sachant que $v'(x)=\sqrt{x^2+1}$, exprimez $f'(x)$ et $g'(x)$ en fonction de x .

Exercice 5 :
f est une fonction définie sur $]-\infty;0]$ par $f(x)=\sqrt{2x^2+3}$.

1. Déterminez la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminez $f'(x)$ puis en déduire les variations de f .
3. A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f et vérifier les variations obtenues au 2.

II. Dérivée seconde d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I. On appelle dérivée seconde de f sur I la fonction dérivée de f' notée f'' .

Exercice 6 :
f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-3x^3+x^2+1$.

1. Déterminez $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. Déterminez $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$

Remarque : En physique, $f(t)=x(t)$ *représente la position d'un objet en fonction du temps ,* $f'(t)=x'(t)$ *est la vitesse instantanée de cet objet à l'instant* t *et* $f''(t)=x''(t)$ *est son accélération à l'instant* t *.*