

Sujet A page 196

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 6x^2 + 7x$.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 6x^2 + 7x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right) = +\infty$ comme produit de limites avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right) = \frac{1}{2}$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$.
- Par un raisonnement analogue, on montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \times 4x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.
 f' est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 6x^2 + 6x - 12$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right) = -\infty$ comme produit de limites avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right) = 2$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

Par un raisonnement analogue, on montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

$$f'(-\frac{7}{2}) = 2 \times (-\frac{7}{2})^3 + 3 \times (-\frac{7}{2})^2 - 12 \times (-\frac{7}{2}) + 7 = 2 \times (-\frac{243}{8}) + 3 \times (\frac{49}{4}) + 42 + 7 = -\frac{343}{4} + \frac{147}{4} + 49$$

$$f'(-\frac{7}{2}) = -(\frac{196}{4}) + 49 = -49 + 49 = 0$$

Par des calculs numériques analogues, on obtient $f'(-2) = 27$ et $f'(1) = 0$.

$$f''(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 - x + 2) \text{ donc } f''(x) \text{ est du signe de } (x^2 - x + 2) \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Or $x_1 = 1$ est racine évidente donc la 2ème racine x_2 vérifie $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $x_2 = 2$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$(x-1)$	-	0	+	+
$(x-2)$	-	-	0	+
$(x-1)(x-2)$	+	0	-	0

On déduit le tableau de variations de f' sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
$f'(x)$	$-\infty$		\nearrow 27	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$

Conclusion : On a bien vérifié les données du tableau de variations de f' donné dans l'énoncé.

4. a) A l'aide du tableau de variations de f' , on déduit son tableau de signes.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+

b) On déduit le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$-\frac{2107}{32}$	\nearrow	$+\infty$

$$f\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{2}\right)^4 + \left(-\frac{7}{2}\right)^3 - 6 \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \times \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{2107}{32}$$

Sujet B page 196

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 10e^{u(x)}$ avec $u(x) = -e^{2-\frac{x}{10}}$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. Soit $x \geq 0$. On a $f'(x) = 10u'(x) \times e^{u(x)}$.

Or $u'(x) = -(-\frac{1}{10}) \times e^{2-\frac{x}{10}} = (-\frac{1}{10}) \times (-e^{2-\frac{x}{10}}) = -\frac{1}{10}u(x)$ d'où $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-u(x) = e^{2-\frac{x}{10}} > 0$.
On déduit que $\forall x \geq 0, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{10} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{x}{10} = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2-\frac{x}{10}} = 0$ par composition de limites donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{2-\frac{x}{10}} = 0$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$. On déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10e^{u(x)} = 10$ par composition de limites.

3. (a) $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$. Soit $x \geq 0$. On a :

$$f''(x) = -[u'(x)e^{u(x)} + u(x) \times u'(x)e^{u(x)}] = -[-\frac{1}{10}u(x)e^{u(x)} + u(x)(-\frac{1}{10}u(x))e^{u(x)}]$$

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1+u(x)).$$

(b) $\forall x \geq 0, u(x) < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc $\frac{1}{10}u(x)e^{u(x)} < 0$.

Étude du signe de $1+u(x) = 1 - e^{2-\frac{x}{10}}$ sur $[0; +\infty[$.

- $1+u(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = -1 \Leftrightarrow -e^{2-\frac{x}{10}} = -1 \Leftrightarrow e^{2-\frac{x}{10}} = 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{x}{10} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{10} = 2 \Leftrightarrow x = 20$

- $1+u(x) > 0 \Leftrightarrow u(x) > -1 \Leftrightarrow -e^{2-\frac{x}{10}} > -1 \Leftrightarrow e^{2-\frac{x}{10}} < 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{x}{10} < 0$ car $X \rightarrow e^X$ est strictement croissante sur \mathbb{R} . On déduit que $1+u(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{10} > 2 \Leftrightarrow x > 20$.

- De même $1+u(x) < 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 20$.

On déduit le tableau de variations de f' sur $[0; +\infty[$.

x	0	20	$+\infty$
$\frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}$	-	-	-
$1+u(x)$	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-
f'			

(c) f' est croissante sur $[0; 20]$ puis décroissante sur $[20; +\infty[$ donc f' admet un maximum en 20 donc la vitesse de décroissance de longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.

Sujet C page 196

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x e^{-x^2}$.

1. Soit $x > 0$. On a $-x^2 \leq -2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai donc $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ car $X \rightarrow e^X$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. (a) Soit $x > 0$. On a $-0,5e \times (-2x e^{-2x}) = e \times x e^{-2x} = x e^{-2x+1}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2}$ est une Fi du type $+\infty \times 0$.

Or pour $x > 0, e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ d'après le 1. donc $0 < x e^{-x^2} \leq x e^{-2x+1}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e}{2} \times ((-2x) \times e^{-2x}) = 0$ par composition de limites avec

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ (limite usuelle).

On déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

On déduit que C_f admet l'axe des abscisses pour asymptotes au voisinage de $+\infty$.

3. $f(x) = x e^{-x^2}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Soit $x \geq 0$. On a :

$$f'(x) = 1 e^{-x^2} + x \times (-2x) \times e^{-x^2} = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} \times (1 - 2x^2) = e^{-x^2} \times 2 \left(\frac{1}{2} - x^2\right)$$

$$f'(x) = 2 e^{-x^2} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - x\right) \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + x\right) = 2 e^{-x^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right)$$

4. $x \geq 0$ donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right) > 0$. De plus, $\forall X \in \mathbb{R}, e^X > 0$.

On déduit que $f'(x)$ est du signe de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$ d'où le tableau de variations de f .

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$		+	0 -
$f'(x)$		+	0 -
f	0	\nearrow	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-0,5}$ \searrow 0

Partie B

1. $A(x) = ON \times OP$.

2. D'après la Partie A, on déduit que $A(x)$ admet un maximum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-0,5}$.

Remarque : on vérifie que $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0; 2]$.

3. La surface à peindre en bleu vaut $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times e^{-0,5} \approx 0,43 \text{ m}^2$.

Sujet D page 197

1. Dans OMH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 \Leftrightarrow 1^2 = x^2 + HM^2 \Leftrightarrow HM^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow HM = \sqrt{1 - x^2} \text{ avec } 0 < x < 1 .$$

2. Soit $g(x) = \pi x^2 \sqrt{1 - x^2}$ définie sur $]0; 1[$.

(a) g est dérivable sur $]0; 1[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0; 1[$ avec $1 - x^2 > 0$ pour $x \in]0; 1[$.

Soit $0 < x < 1$. On a :

$$g'(x) = \pi \times 2x \times \sqrt{1 - x^2} + \pi x^2 \times \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\pi x \sqrt{1 - x^2} - \frac{2\pi x^3}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2\pi x(1 - x^2) - \pi x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{\pi x(2 - 2x^2 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(b) $\forall 0 < x < 1, \pi x > 0$ et $\sqrt{1 - x^2} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2 - 3x^2 = -3x^2 + 2$.

$$\text{Or, } -3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ avec } 0 < x < 1 .$$

On déduit le tableau de variations de g sur $]0; 1[$.

t	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1
$g'(t)$	+	0	-
g	0	$\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$	0

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \pi t^2 \sqrt{1 - t^2} = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \pi t^2 \sqrt{1 - t^2} = 0$$

$$g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \pi \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \pi \times \frac{2}{3} \times \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \pi \times \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

3. g est croissante sur $]0; \sqrt{\frac{2}{3}}]$ puis décroissante sur $[\sqrt{\frac{2}{3}}; 1[$ donc g admet un

maximum en $\sqrt{\frac{2}{3}}$. On déduit que le volume du cylindre est maximal lorsque $g(x)$ est

maximal c'est à dire lorsque $x = OH = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et par conséquent lorsque $MH = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Le volume maximal vaut $g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

4.

```
V ← 0
X ← 0
Tant que V < 1
  x ← x + 0,001
  V ← π x2 √(1-x2)
Fin Tant que
```

Sujet E page 197

Soit $f(t) = 980 e^{-\frac{t}{5}} + 20$ avec $t \geq 0$.

1. (a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t}{5} = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ par composition de limites.


(b) f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$. Soit $t \geq 0$. On a :

$$f'(t) = 980 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times e^{-\frac{t}{5}} = -196 e^{-\frac{t}{5}}. \text{ Or, } \forall X \in \mathbb{R}, e^X > 0 \text{ donc } \forall t \geq 0, f'(t) < 0 \text{ donc}$$

f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ avec $f(0) = 1000$.

On déduit le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	
f	1000	20



2. Soit $d(t) = f(t) - f(t+1)$ pour $t \geq 0$.

(a) $d(t) = (980 e^{-\frac{t}{5}} + 20) - (980 e^{-\frac{t+1}{5}} + 20) = 980 e^{-\frac{t}{5}} (1 - e^{-\frac{1}{5}})$

(b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$ (vu au 1.(a)) donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$.

(c) On déduit que si t très sensiblement augmente alors la température du four ne baisse plus au cours d'une heure.

Sujet F page 197

Soit $f(x) = x + \frac{1}{(x-7)^2}$ définie sur $]7; +\infty[$.

1. $f(x) = x + \frac{1}{(x-7)^2} = x + (x-7)^{-2}$ est dérivable sur $]7; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]7; +\infty[$ avec $(x-7)^2$ qui ne s'annule pas sur $]7; +\infty[$.

Soit $x > 7$. On a :

$$f'(x) = 1 + (-2) \times 1 \times (x-7)^{-3} = 1 - \frac{2}{(x-7)^3}$$

réponse : c

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{(x-7)^2} = +\infty$ comme somme de limites avec :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-7)^2} = 0 \text{ comme composée de limites avec :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-7) = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty \text{ et } \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{1}{Y} = 0$$

réponse : a

3. $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} x + \frac{1}{(x-7)^2} = +\infty$ comme somme de limites avec :

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} x = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{(x-7)^2} = +\infty \text{ comme composée de limites avec :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} x = 7 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 7^+} (x-7)^2 = 0^+$$

$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = +\infty$ donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x=7$.

réponse : d

4. Soit $\frac{1}{(x-7)^2} \leq g(x) \leq f(x)$ avec g définie sur $]7; +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{1}{(x-7)^2} = +\infty$ (limite étudiée au 3.) donc $\lim_{x \rightarrow 7^+} g(x) = +\infty$ par comparaison de limites.

réponse : c