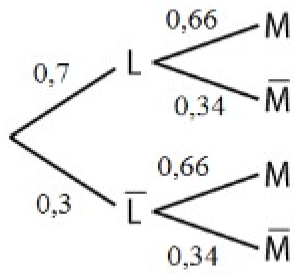
Sujet A page 396



1. Les événements L et M sont indépendants donc les événements $\bar{L}$ et M également ainsi que les événements $\bar{L}$ et $\bar{M}$.
   On déduit que $P_L(M)=P(M)=0{,}66$; $P_L(\bar{M})=P(\bar{M})=0{,}34$; $P_{\bar{L}}(M)=P(M)=0{,}66$ et $P_{\bar{L}}(\bar{M})=P(\bar{M})=0{,}34$.

2. $\Omega=\{L;\bar{L}\}\times\{M;\bar{M}\}$

3. $\Omega=\{(L;M);(L;\bar{M});(\bar{L};M);(\bar{L};\bar{M})\}$

   $P((L;M))=0{,}7\times0{,}66=0{,}462$ $P((L;\bar{M}))=0{,}7\times0{,}34=0{,}238$
   $P((\bar{L};M))=0{,}3\times0{,}66=0{,}198$
   $P((L;M))=0{,}3\times0{,}34=0{,}102$

4. a) L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un cycliste et à s'intéresser au fait qu'il réalise le parcours en moins de 5h ou pas est une épreuve de Bernoulli de paramètre p=0,66.
   Le choix de 10 cyclistes pouvant être assimilé à un tirage avec remise, les tirages sont par conséquents identiques et indépendants.
   On obtient donc un schéma de Bernoulli de taille n=10.
   La variable aléatoire égale au nombre de cyclistes ayant réalisé le parcours en moins de 5h suit donc une loi binomiale B(n=10 ; p=0,66).

b) $P(X=4)=\binom{10}{4}\times0{,}66^4\times(1-0{,}66)^4\approx0{,}062$ arrondi à 10^{-3} près .

c) $P(X\leqslant3)\approx0{,}022$ arrondi à 10^{-3} près

d) Calculer la probabilité que plus de 5 cyclistes sur les 10 cyclistes aient réalisé le parcours en 5 heures et plus revient à calculer la probabilité qu'au plus 4 cyclistes sur les 10 cyclistes aient réalisés le parcours en moins de 5 heures. On déduit que la probabilité que plus de 5 cyclistes sur les 10 cyclistes aient réalisé le parcours en 5 heures et plus vaut :
$P(X\leqslant4)\approx0{,}084$ arrondi à 10^{-3} près .

5. La probabilité de choisir un cycliste licencié est égale à 0,7.
   Soit Y la variable aléatoire comptabilisant le nombre de licenciés parmi n cyclistes choisis au hasard de manière identique et indépendante.
   On cherche donc n tel que $P(Y\geqslant1)\geqslant0{,}99$.
   $P(Y\geqslant1)\geqslant0{,}99\Leftrightarrow1-P(Y=0)\geqslant0{,}99\Leftrightarrow1-0{,}3^n\geqslant0{,}99\Leftrightarrow0{,}3^n\leqslant0{,}01$

A l'aide de la calculatrice (mode RECURRENCE par exemple) on obtient $n\geqslant4$.

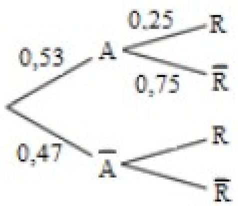
Autre méthode : à l'aide de la fonction logarithme népérien
$0{,}3^n\leqslant0{,}01\Leftrightarrow n\ln(0{,}3)\leqslant\ln(0{,}01)\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}3)}$. Or $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}3)}\approx3{,}82$ donc $n\geqslant4$.

Sujet B page 396

Partie A

1. $P(A)=0{,}53\,;P(R)=0{,}32$ et $P_A(R)=0{,}25$

2. On obtient l'arbre de probabilité suivant :



3. $P(A\cap R)=P(A)\times P_A(R)=0{,}53\times 0{,}25=0{,}1325$

4. $P_R(A)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(R)}=\dfrac{0{,}1325}{0{,}32}\approx 0{,}415$ arrondi à 10^{-3} près

5. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(R)=P(A\cap R)+P(\bar{A}\cap R)$ donc $0{,}32=0{,}1325+P(\bar{A}\cap R)$ donc
   $P(\bar{A}\cap R)=0{,}32-0{,}1325=0{,}1875$
   On déduit $P_{\bar{A}}(R)=\dfrac{P(\bar{A}\cap R)}{P(\bar{A})}=\dfrac{0{,}1875}{0{,}47}\approx 0{,}399$ arrondi à 10^{-3} près .

6. On veut calculer $P_{\bar{R}}(\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}\cap\bar{R})}{P(\bar{R})}$.
   On a $P(\bar{R})=1-P(R)=1-0{,}32=0{,}68$.
   A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(\bar{R})=P(A\cap\bar{R})+P(\bar{A}\cap\bar{R})$
   donc $0{,}68=0{,}53\times 0{,}75+P(\bar{A}\cap\bar{R})=0{,}3975+P(\bar{A}\cap\bar{R})$
   donc $P(\bar{A}\cap\bar{R})=0{,}68-0{,}3975=0{,}2825$
   donc $P_{\bar{R}}(\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}\cap\bar{R})}{P(\bar{R})}=\dfrac{0{,}2825}{0{,}68}\approx 0{,}416$ arrondi à 10^{-3} près

Partie B

1. L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un client et à s'intéresser au fait qu'il souscrive un placement R_1 ou pas est une épreuve de Bernoulli de paramètre p=0,23.
   On répète cette expérience aléatoire 45 fois de manière identique et indépendante. On obtient un schéma de Bernoulli de taille n=45.
   La variable aléatoire X égale au nombre de clients ayant souscrits un placement R_1 suit donc une loi binomiale B(n=45 ; p=0,23).
   On a $P(X=10)=\binom{45}{10}\times 0{,}23^{10}\times(1-0{,}66)^{35}\approx 0{,}141$ arrondi à 10^{-3} près .

2. Camille obtient exactement 150€ de prime si elle convainc entre 10 et 15 clients (exclu) de souscrire au placement R_1. La probabilité associée est égale (à l'aide de la calculatrice) à :
   $P(10 \leqslant X < 15) = P(X < 15) - P(X < 10) = P(X \leqslant 14) - P(X \leqslant 9) \approx 0{,}532$ arrondi à 10^{-3} près

3. Camille obtient exactement 150€ de prime si elle convainc au moins 15 clients de souscrire au placement R_1. La probabilité associée est égale (à l'aide de la calculatrice) à :
   $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \approx 0{,}075$ arrondi à 10^{-3} près

Sujet C page 397

Partie A

1. $P(V\cap A)=P(A)\times P_A(V)=0{,}6\times 0{,}98=0{,}588$
2. A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales on a :
 $P(V)=P(V\cap A)+P(V\cap B)$ donc $0{,}96=0{,}588+P(V\cap B)$ donc
 $P(V\cap B)=0{,}96-0{,}588=0{,}372$.

On déduit que $P_B(V)=\dfrac{P(V\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}372}{0{,}4}=0{,}93$.

3. $P(B)=P(B\cap V)+P(B\cap\bar{V})$ donc $0{,}4=0{,}372+P(B\cap\bar{V})$ donc
 $P(B\cap\bar{V})=0{,}4-0{,}372=0{,}028$.
 On a $P_{\bar{V}}(B)=\dfrac{P(B\cap\bar{V})}{P(\bar{V})}=\dfrac{0{,}028}{0{,}04}=0{,}7=70\,\%$ donc le technicien a raison.

Partie B

1. a) L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une bille et à s'intéresser au fait qu'elle soit de couleur noire ou pas est une épreuve de Bernoulli de paramètre p=0,2.
 La quantité de billes produites étant suffisamment grande pour considérer le remplissage d'un sachet à un tirage successif avec remise des billes, on peut considérer le remplissage d'un sachet comme 40 épreuves identiques et indépendantes. On obtient un schéma de Bernoulli de taille n=40.
 La variable aléatoire X égale au nombre de billes noires contenues dans un sachet de 40 billes suit donc une loi binomiale B(n=40 ; p=0,2).
 On a $P(X=10)=\binom{40}{10}\times 0{,}2^{10}\times(1-0{,}2)^{30}\approx 0{,}107$ arrondi à 10^{-3} près .

 b) Cherchons les deux plus petits entiers a et b pour lesquels $P(X\leqslant a)>0{,}025$ et $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.
 A l'aide de la calculatrice, on obtient a = 3 et b = 13.
 On déduit que $P(3\leqslant X\leqslant 13)\geqslant 0{,}95$. Or 12 est bien compris entre 3 et 13 donc on ne remet pas en cause le réglage de la machine avec un risque d'erreur de 5 %.

2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n afin d'obtenir $P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99$ où X est une variable aléatoire qui suit une loi B(n ; p=0,2). Or,
 $P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99\Leftrightarrow 1-P(X=0)\geqslant 0{,}99\Leftrightarrow P(X=0)\leqslant 0{,}01\Leftrightarrow 0{,}8^n\leqslant 0{,}01$

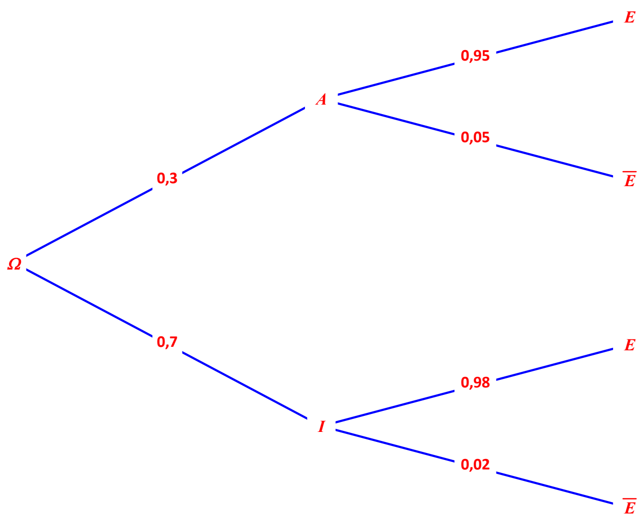
 A l'aide de la calculatrice, on trouve n = 21 (mode RECURRENCE par exemple).

 Par le calcul à l'aide des logarithmes népériens, on trouve :
 $(0{,}8)^n\leqslant 0{,}01\Leftrightarrow n\ln(0{,}8)\leqslant\ln(0{,}01)\Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$. Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}\approx 20{,}63$ d'où n = 21.

Sujet D page 397

Partie A

1. Arbre de probabilité



2. A et I forment une partition de l'univers des clients de la compagnie. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(\bar{E})=P(A\cap\bar{E})+P(I\cap\bar{E})=0{,}3\times0{,}05+0{,}7\times0{,}02=0{,}029$$

3. $P_{\bar{E}}(A)=\dfrac{P(A\cap\bar{E})}{P(\bar{E})}=\dfrac{0{,}3\times0{,}05}{0{,}029}=\dfrac{15}{29}\approx0{,}517$ à 10^{-3} près

Partie B

1. $P(X=202)=\dbinom{202}{202}\times0{,}971^{202}\times0{,}029^{0}=0{,}971^{202}\approx0{,}003$ arrondi à 10^{-3} près

2. $P(X=201)=\dbinom{202}{201}\times0{,}971^{201}\times0{,}029^{1}\approx0{,}016$ arrondi à 10^{-3} près

3. $P(X>200)=P(X=201)+P(X=202)\approx0{,}019$ arrondi à 10^{-3} près

Partie C

La probabilité de satisfaction est $p=0{,}98$.

Pour un échantillon de taille $n=400$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence observée est $I=[\frac{a}{n};\frac{b}{n}]$ avec a et b les deux plus petits entiers tels que $P(X\leqslant a)>0{,}025$ et $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $a=386$ et $b=397$ donc $I=[\frac{386}{400};\frac{397}{400}]$.

Or la fréquence observée est $f=\frac{383}{400}\notin I$ donc on ne peut pas accepter, au risque d'erreur de 5 %, que la probabilité de satisfaction soit $p=0{,}98$ pour des échantillons de taille $n=400$.