Exercice 1

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable
- La machine A fournit 60 % de la production journalière
- La production de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

- A : « la bille a été fabriquée par la machine A »
- B : « la bille a été fabriquée par la machine B »
- V : « la bille est vendable »

1. Modélisée la situation à l'aide d'un arbre de probabilité
2. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
3. Justifier que $P(V \cap B)=0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
4. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

Partie B

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge.

Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

Dans les questions 1&2, les sachets sont tous composés de 40 billes.

1. On choisit au hasard un sachet de billes.
   (a) Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira la résultat à 0,001 près.
   (b) Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne au moins 10 billes noires. On arrondira la résultat à 0,001 près.
2. On remplit un sachet de 40 billes, choisies au hasard, de manière indépendante (tirages supposés avec remise). On considère la variable aléatoire X égale au nombre de billes noires présentes dans le sachet. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n=40 et p=0,2.
   (a) A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a)>0,025$.
   (b) A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.
   (c) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-il de remettre en cause la réglage de la machine qui teinte les billes ?
3. L'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %.
   (a) A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif.
   (b) <u>Bonus</u> : Retrouver votre résultat par la résolution d'une inéquation.

Exercice 2

Tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible exceptée la question 4)c) où une valeur approchée à 0,01 suffira.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les événements suivants :
J_1 : « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »
J_2 : « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »
J_3 : « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »
J_4 : « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »
B : « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

1. Justifier que $P_{J_1}(B)=\frac{2}{5}$ puis $P_{J_2}(B)=\frac{2}{15}, P_{J_3}(B)=\frac{1}{30}$ et $P_{J_4}(B)=\frac{1}{210}$.
   Indication : vous pourrez utiliser un arbre de probabilités pour justifier vos calculs.
2. Montrer que $P(B)=\frac{1}{7}$.
3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tiré sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?
4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire égale au nombre de parties où toutes les boules tirées sont blanches.
   a) Quelle est la loi suivie par N ? Justifier rigoureusement votre réponse.
   b) Quelle est l'espérance de N ?
   c) Calculer la probabilité de l'événement (N=3).
5. On décide de faire un jeu d'argent. Un joueur doit payer 10€ pour rentrer dans la partie. La partie se déroule comme expliqué précédemment.
   - Si le joueur termine avec 4 boules blanches exactement, il gagne 1000€.
   - Si le joueur termine avec 3 boules blanches exactement (sans boule noire), il gagne 100€.
   - Si le joueur termine avec 2 boules blanches exactement (sans boule noire), il gagne 50€.
   - Si le joueur termine avec 1 boule blanche exactement (sans boule noire), il gagne 20€.

   Ce jeu est-il favorable au joueur ? Justifier rigoureusement votre réponse.

Indication : on pourra introduire une variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.

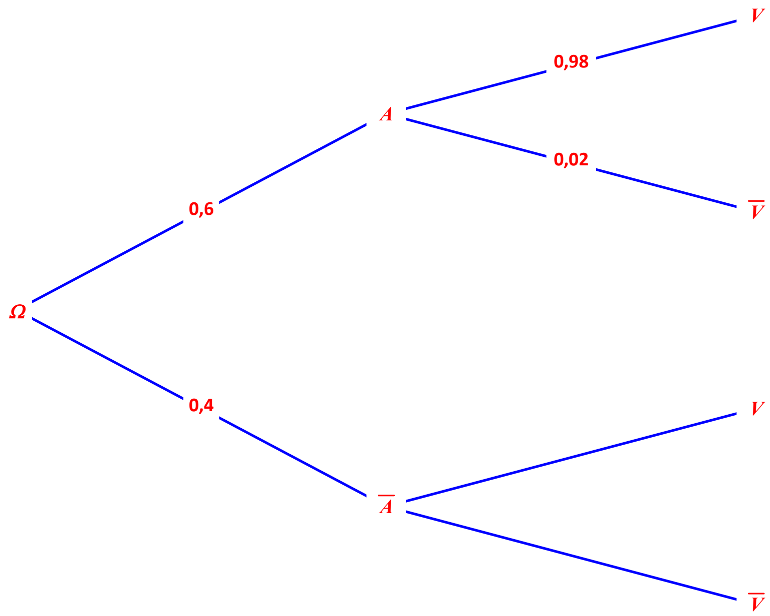
Correction

Exercice 1 :

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie A

1.



2. $P(A\cap V)=P(A)\times P_A(V)=0{,}6\times 0{,}98=0{,}588$

3. A et B forment une partition de Ω donc d'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(V)=P(A\cap V)+P(B\cap V)$
   $0{,}96=0{,}5888+P(V\cap B)$ donc $P(V\cap V)0{,}96-0{,}588=0{,}372$ d'où
   $P_B(V)=\dfrac{P(B\cap V)}{P(B)}=\dfrac{0{,}372}{0{,}4}=0{,}93$

4. On cherche à calculer $P_{\bar{V}}(B)$. On a
   $P_{\bar{V}}(B)=\dfrac{P(\bar{V}\cap B)}{P(\bar{V})}=\dfrac{P(B)\times P_B(\bar{V})}{(1-P(V))}=\dfrac{P(B)\times(1-P_B(V))}{(1-P(V))}=\dfrac{0{,}4\times(1-0{,}93)}{(1-0{,}96)}=\dfrac{0{,}4\times 0{,}07}{0{,}04}=0{,}7=70\,\%$
   donc le technicien a raison.

Partie B

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
(a) L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une bille et à s 'intéresser à sa couleur noire (succès) ou pas est une épreuve de Bernoulli de paramètre p=0,2.
Le nombre de billes étant suffisamment grand , on considère les tirages comme étant avec remise. Ainsi, on répète 40 fois de manière identique et indépendante cette expérience aléatoire. On obtient un schéma de Bernoulli de taille 40. La variable aléatoire X comptabilisant le nombre de billes noires dans un sachet de 40 billes suit donc une loi binomiale de paramètres n=40 et p = 0,2.
On déduit que :

$$P(X=10)=\binom{40}{10}0{,}2^{10}\times 0{,}8^{30}\approx 0{,}107 \text{ arrondi à } 0{,}001 \text{ près}$$

(b) $P(X\geqslant 10)=1-P(X\leqslant 9)\approx 0{,}268$ arrondi à 0,001 près

2. (a) A l'aide de la calculatrice, le plus petit entier a tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$ est $a=3$.
(b) A l'aide de la calculatrice, le plus petit entier b tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$ est $b=13$.
(c) Le plus petit entier a tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$ est $a=3$.
Le plus petit entier b tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$ est $b=13$.

Or, $P(3\leqslant X\leqslant 13)=P(x\leqslant 13)-P(X<3)=P(X\leqslant 13)-P(X\leqslant 2)$
Or $P(X\leqslant 13)\geqslant 0{,}975$ car $b=13$ est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant b)\geqslant 0{,}975$
et $a=3$ est le plus petit entier tel que $P(X\leqslant a)>0{,}025$
donc $P(X\leqslant 2)\leqslant 0{,}025$ donc $-P(X\leqslant 2)\geqslant -0{,}025$.

On déduit que $P(3\leqslant X\leqslant 13)=P(x\leqslant 13)-P(X<3)=P(X\leqslant 13)-P(X\leqslant 2)\geqslant 0{,}975-0{,}025=0{,}950$

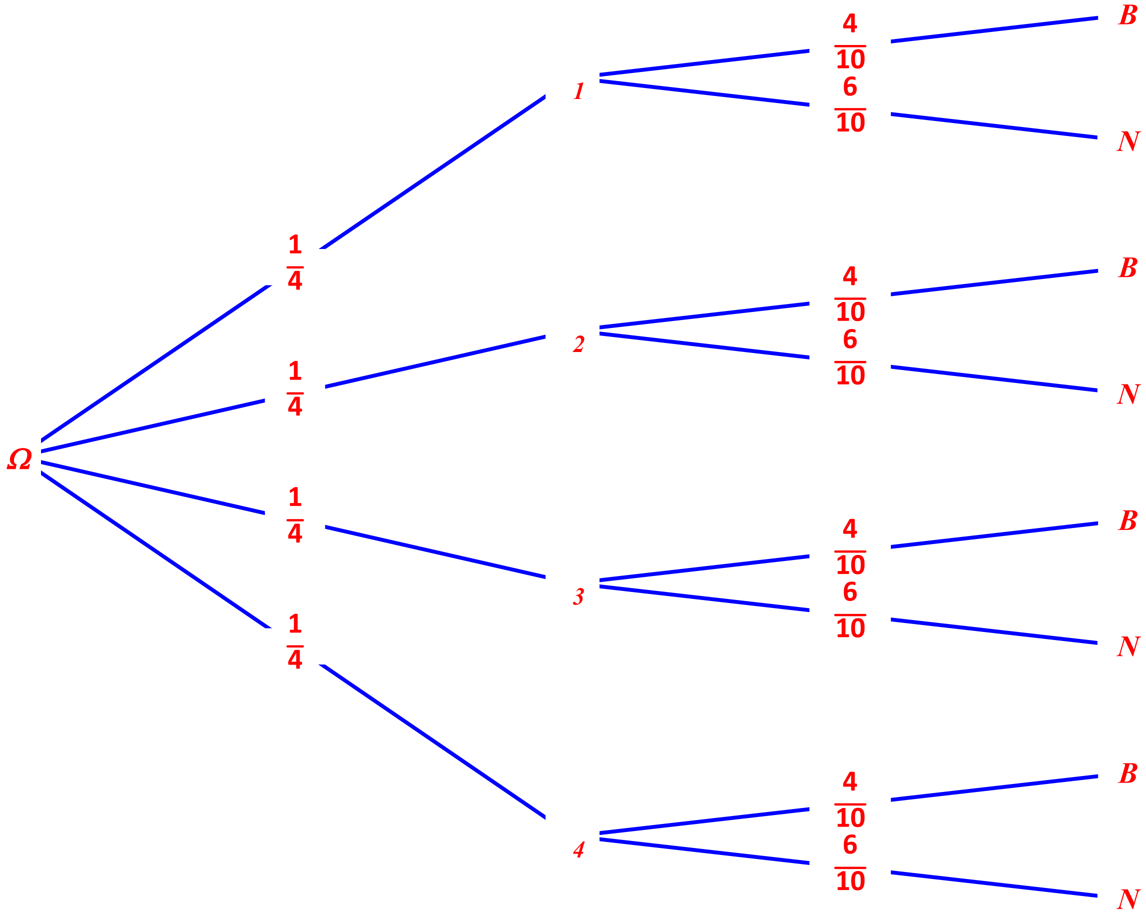
12 appartient à l'intervalle [3;13] au niveau de confiance de 95 % donc on ne peut pas remettre en cause le réglage de la machine.

3. Soit n le nombre de billes minimal dans un sachet. On veut $P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99$:
$P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99$
$\Leftrightarrow 1-P(X=0)\geqslant 0{,}99$
$\Leftrightarrow -P(X=0)\geqslant -0{,}01$
$\Leftrightarrow P(X=0)\leqslant 0{,}01$
$\Leftrightarrow 0{,}08^{n}\leqslant 0{,}01$

(a) A l'aide de la calculatrice, on obtient $0{,}08^{20}\approx 0{,}0115\leqslant 0{,}01$ et $0{,}08^{21}\approx 0{,}0092$ donc le nombre minimal de billes dans chaque sachet afin que $P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99$ est $n=21$.

(b) $0{,}08^{n}\leqslant 0{,}01$
$\Leftrightarrow n\ln(0{,}8)\leqslant \ln(0{,}01)$
$\Leftrightarrow n\geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}\approx 20{,}63$.
Or $n\in\mathbb{N}$ donc il faut prendre $n\geqslant 21$, donc le nombre minimal de billes dans chaque sachet afin que $P(X\geqslant 1)\geqslant 0{,}99$ est $n=21$.

Exercice 2



1. $P_{J_1}(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

   $P_{J_2}(B)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{12}{90}=\frac{4}{30}$

   $P_{J_3}(B)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}$

   $P_{J_4}(B)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{210}$

2. $(J_1;J_2;J_3;J_4)$ forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(B)=P(B\cap J_1)+P(B\cap J_2)+P(B\cap J_3)+P(B\cap J_4)$
   $P(B)=P(J_1)\times P_{J_1}(B)+P(J_2)\times P_{J_2}(B)+P(J_3)\times P_{J_3}(B)+P(J_4)\times P_{J_4}(B)$
   $P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{30}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{30}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{210}=\frac{84}{840}+\frac{28}{840}+\frac{7}{840}+\frac{1}{840}=\frac{120}{840}=\frac{1}{7}$

3. On veut calculer $P_B(J_3)$.

$$P_B(J_3)=\frac{P(B\cap J_3)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{30}}{\frac{1}{7}}=\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{7}}=\frac{7}{120}$$

4. a) On considère l'expérience aléatoire consistant à jouer une partie et à s'intéresser au fait que toutes les boules tirées soient blanches (succès) ou pas (échec). Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=P(B)=\frac{1}{7}$.

   On réitère cette épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante 10 fois. On obtient un schéma de Bernoulli de taille $n=10$.
   La variable aléatoire N comptabilisant le nombre de parties où toutes les boules tirées sont blanches suit donc une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{7}$.

   b) $E(N)=n\times p=10\times\frac{1}{7}=\frac{10}{7}$

   c) $P(N=3)=\binom{10}{3}\times\left(\frac{1}{7}\right)^3\times\left(\frac{6}{7}\right)^7\approx 0{,}12$

5. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   X peut prendre les valeurs 990 ; 90 ; 40 ; 10 ou -10.

$$P(X=990)=P(B\cap J_4)=P(J_4)\times P_{J_4}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{210}=\frac{1}{840}$$
$$P(X=90)=P(B\cap J_3)=P(J_3)\times P_{J_3}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{7}{120}=\frac{7}{840}$$
$$P(X=40)=P(B\cap J_2)=P(J_2)\times P_{J_2}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{30}=\frac{1}{30}=\frac{28}{840}$$
$$P(X=10)=P(B\cap J_1)=P(J_1)\times P_{J_1}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{10}=\frac{84}{840}$$
$$P(X=-10)=1-(\frac{1}{840}+\frac{7}{840}+\frac{28}{840}+\frac{84}{840})=1-\frac{10}{840}=\frac{720}{840}$$

d'où la loi de X :

$X=x_i$	990	90	40	10	-10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{840}$	$\frac{7}{840}$	$\frac{28}{840}$	$\frac{84}{840}$	$\frac{720}{840}$

$$E(X)=990\times\frac{1}{840}+90\times\frac{7}{840}+40\times\frac{28}{840}+10\times\frac{84}{840}-10\times\frac{720}{840}=\frac{-3620}{840}\approx-4{,}31\text{ €}$$

Conclusion : le jeu est défavorable au joueur. Sur un grand nombre de parties, il perdra en moyenne 4€31 par partie.