

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par $u_n = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2 + \sum_{k=1}^n 2^k$ et $v_n = u_n - 1$. Une seule des deux suites est géométrique.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle qu'il existe un réel L tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
Pour tout entier naturel n , $u_n = n + 1$.

Exercice 2

Une cliente dépose 5000€ sur un compte en banque le 1^{er} janvier 2019.

Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus, de dernier jour de chaque mois, elle dépose 2000€ supplémentaires sur le compte.

On note u_n la somme sur le compte au 1^{er} jour du mois, n mois après janvier 2019.

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2 .
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,75u_n + 2000$.
3. On souhaite connaître la somme sur le compte le 1^{er} janvier 2020.
(a) Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il réponde, à la question.

```

u = .....
for i in range (.....) :
    u = .....
print (.....)
```

(b) A l'aide de la calculatrice, déterminer la somme sur le compte le 1^{er} janvier 2020.

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 8000$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8000$.
(a) Montrer que (v_n) est géométrique.
(b) Déterminer l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

Exercice 3

Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île. En 2020, elle estime qu'il y a 1000 singes sur l'île.

A- Premier modèle

La biologiste suppose que la population de singes sur l'île augmente de 4% chaque année. On note u_n le nombre de singes, en milliers, en 2020+n.

1. Donner la valeur de u_0 puis calculer u_1 .
2. Déterminer, la nature de la suite (u_n) , puis exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Que peut-on penser de ce modèle ?

B- Second modèle

La biologiste suppose que la population de singes sur l'île est finalement modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0=1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -\frac{1}{40}v_n^2 + 1,1v_n.$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{40}x^2 + 1,1x$.
Justifier que f est strictement croissante sur $[0;10]$.
2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq 4$.
(b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
(c) En déduire la convergence de la suite (v_n) .
(d) Soit L la limite de la suite (v_n) . On admet que $L = f(L)$. Déterminer L .
3. On souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population de singes dépassera les 3000 individus. Recopier et compléter la programme ci-dessous pour qu'il réponde au problème.

```

n = 0
v = 1
while .....
    v = .....
    n = .....
print (.....)
```

Corrigé

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2 + 2(1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}) = 2 + 2 \times \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) = 2 + 2 \times (2^n - 1) = 2 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1}$$

On déduit que $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$ donc (u_n) est géométrique de raison 2.

D'autre part, $v_1 = u_1 - 1 = 4 - 1 = 3$; $v_2 = u_2 - 1 = 8 - 1 = 7$ et $v_3 = u_3 - 1 = 16 - 1 = 15$

$$\text{donc } \frac{v_2}{v_1} = \frac{7}{3} \text{ et } \frac{v_3}{v_2} = \frac{15}{7} .$$

Or, $7 \times 7 = 49$ et $15 \times 3 = 45$ donc $\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_3}{v_2}$ donc (v_n) n'est pas géométrique.

2. (u_n) est une suite réelle telle qu'il existe un réel L tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = L$ donc pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un rang N tel que $\forall n \geq N, -\epsilon < n u_n < \epsilon$ donc $\forall n \geq N, -\frac{\epsilon}{n} < u_n < \frac{\epsilon}{n}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\epsilon}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Conclusion : l'affirmation 2 est vraie.

3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.

Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ la propriété : « $u_n = n + 1$ ».

Démontrons, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel $P(n)$ soit vraie c'est à dire que pour lequel $u_n = n + 1$.

On a $u_n = n + 1$

$$\text{donc } 10u_n - 9n - 8 = 10(n + 1) - 9n - 8 = 10n + 10 - 9n - 8 = n + 2$$

donc $u_{n+1} = n + 2$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang $n = 0$ et héréditaire donc la propriété est vraie pour tout entier naturel d'après le principe du raisonnement par récurrence donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1$.

Conclusion : l'affirmation 3 est vraie.

Exercice 2

$$1. \quad u_1 = u_0 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 2000 = 5000 \times 0,75 + 2000 = 3750 + 2000 = 5750$$

$$u_2 = u_1 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + 2000 = 5750 \times 0,75 + 2000 = 4312,50 + 2000 = 6312,50$$

2. u_n représente la somme sur le compte au 1^{er} jour du mois, n mois après janvier 2019.

Au cours du $(n+1)$ -ième mois, la cliente a dépensé le quart de u_n donc il lui reste les trois-quarts de u_n auxquels elle ajoute, le dernier jour, 2000€. On déduit que le 1^{er} janvier, $(n+1)$ mois après le 1^{er} janvier 2019, la somme sur le compte est, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2000 = 0,75u_n + 2000$.

3. On souhaite connaître la somme sur le compte le 1^{er} janvier 2020.

(a)

```

u = 5000
for i in range (1;13) :
    u = 0,75*u_n+2000
print (u)

```

(b) A l'aide de la calculatrice, on déduit que la somme sur le compte au 1^{er} janvier 2020 est égale à 7904,97€ arrondie au centime.

4. (a) Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ la propriété : « $u_n \leq u_{n+1} \leq 8000$ ». Démontrons, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation : Pour $u_0 = 5000$ et $u_1 = 5750$. Or, $5000 \leq u_{n+1} \leq 5000$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel $P(n)$ soit vraie c'est à dire que pour lequel $u_n \leq u_{n+1} \leq 8000$.

On a $u_n \leq u_{n+1} \leq 8000$

donc $0,75u_n + 2000 \leq 0,75u_{n+1} + 2000 \leq 0,75 \times 8000 + 2000$

donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 8000$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang $n=0$ et héréditaire donc la propriété est vraie pour tout entier naturel d'après le principe du raisonnement par récurrence donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 8000$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 8000$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée donc convergente d'après le théorème de convergence monotone.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8000$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8000 = (0,75u_n + 2000) - 8000$$

donc $v_{n+1} = 0,75u_n - 6000 = 0,75\left(u_n - \frac{6000}{0,75}\right) = 0,75(u_n - 8000) = 0,75v_n$ donc (v_n) est géométrique de

raison $q = 0,75$ et de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - 8000 = 5000 - 8000 = -3000$

(b) On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = -3000 \times 0,75^n$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 8000$ donc $u_n = v_n + 8000$ donc $u_n = -3000 \times 0,75^n + 8000$.

$$6. \quad -1 < 0,75 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -3000 \times 0,75^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -3000 \times 0,75^n + 8000 = 8000$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8000$$

Interprétation : la somme d'argent sur le compte de la cliente va croître en se rapprochant de plus en plus de 8000€, sans jamais dépasser 8000€.

Exercice 3

A- Premier modèle

$$1. \quad u_0 = 1 \text{ et } u_1 = u_0 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1 \times 1,04 = 1,04$$

2. En $2020+n$, la population de singes sur l'île vaut u_n .

Cette population augmente de 4% au cours de l'année donc en $2020+(n+1)$, elle vaut

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = u_n \times 1,04 = 1,04 u_n \text{ donc } (u_n) \text{ est géométrique de raison } q = 1,04 \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme}$$

$$u_0 = 1. \text{ On déduit que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times 1,04^n = 1,04^n$$

3. Déterminer la limite de la suite $1,04 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,04^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Selon ce modèle, cela signifierait que la population de singes sur l'île va croître indéfiniment, ce qui semble impossible.

B- Second modèle

La biologiste suppose que la population de singes sur l'île est finalement modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = -\frac{1}{40} v_n^2 + 1,1 v_n.$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{40} x^2 + 1,1 x$.

f est une fonction polynôme du 2nd degré, sous sa forme développée avec $a = -\frac{1}{40}$; $b = 1,1$ et $c = 0$.

$$a = -\frac{1}{40} < 0 \text{ et } \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1,1}{\frac{-2}{40}} = \frac{-1,1}{\frac{-1}{20}} = 1,1 \times 20 = 22 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; 22]$$

puis strictement décroissante sur $[22; +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0; 10]$.

2. (a) Démontrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq 4$.

Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ la propriété : « $\Leftrightarrow 0 \leq v_n \leq 4$ ».

Démontrons, par récurrence, que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation : Pour $v_0 = 1 \in [0; 4]$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel $P(n)$ soit vraie c'est à dire que pour lequel $0 \leq v_n \leq 4$.

On a $0 \leq v_n \leq 4$

donc $f(0) \leq f(v_n) \leq f(4)$ car f est croissante sur $[0;10]$

donc $0 \leq v_{n+1} \leq 4$ avec $f(0)=0$; $f(v_n)=v_{n+1}$ et $f(4)=-\frac{16}{40}+4,4=-\frac{4}{10}+4,4=-0,4+4,4=4$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang $n=0$ et héréditaire donc la propriété est vraie pour tout entier naturel d'après le principe du raisonnement par récurrence donc $0 \leq v_n \leq 4$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{40}v_n^2 + 1,1v_n - v_n = -\frac{1}{40}v_n^2 + 0,1v_n = v_n(-\frac{1}{40}v_n + 0,1)$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq 4$ donc $v_n \geq 0$ donc le signe de $v_{n+1} - v_n$ dépend uniquement du signe de $(-\frac{1}{40}v_n + 0,1)$.

Or, $0 \leq v_n \leq 4$

donc $-\frac{1}{40} \times 0 + 0,1 \geq -\frac{1}{40}v_n + 0,1 \geq -\frac{1}{40} \times 4 + 0,1$

donc $0,1 \geq -\frac{1}{40}v_n + 0,1 \geq 0$

donc $0 \leq -\frac{1}{40}v_n + 0,1 \leq 0,1$

Conclusion : $v_{n+1} - v_n \geq 0$ comme produit de facteurs positifs ou nuls donc (v_n) est croissante.

Remarque : une démonstration par récurrence utilisant les variations de la fonction f était également possible.

(c) (v_n) est croissante et majorée donc convergente d'après le théorème de convergence monotone.

(d) Soit L la limite de la suite (v_n) . On admet que $L = f(L)$.

$$L = f(L) \Leftrightarrow -\frac{1}{40}L^2 + 1,1L = L$$

$$L = f(L) \Leftrightarrow -\frac{1}{40}L^2 + 0,1L = 0$$

$$L = f(L) \Leftrightarrow L(-\frac{1}{40}L + 0,1) = 0$$

$$L = f(L) \Leftrightarrow L = 0 \text{ ou } -\frac{1}{40}L + 0,1 = 0$$

$$L = f(L) \Leftrightarrow L = 0 \text{ ou } -\frac{1}{40}L = -0,1$$

$$L = f(L) \Leftrightarrow L = 0 \text{ ou } L = 40 \times 0,1 = 4$$

Or, (v_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq 4$ donc seule la valeur $L=4$ convient.

Conclusion : $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 4$.

3.

```
n = 0
v = 1
while v <= 3 :
    v = -1/40*v**2+1,1*v
    n = n+1
print (n)
```