

Chapitre 4 : Calculs de limites

I. Limites d'une fonction et asymptotes

Dans tout ce chapitre, L, A, B, α et β désignent des réels, f, g et h désignent des fonctions

1. Limites d'une fonction f au voisinage de l'infini

(a) Limite finie d'une fonction au voisinage de l'infini

Définition :

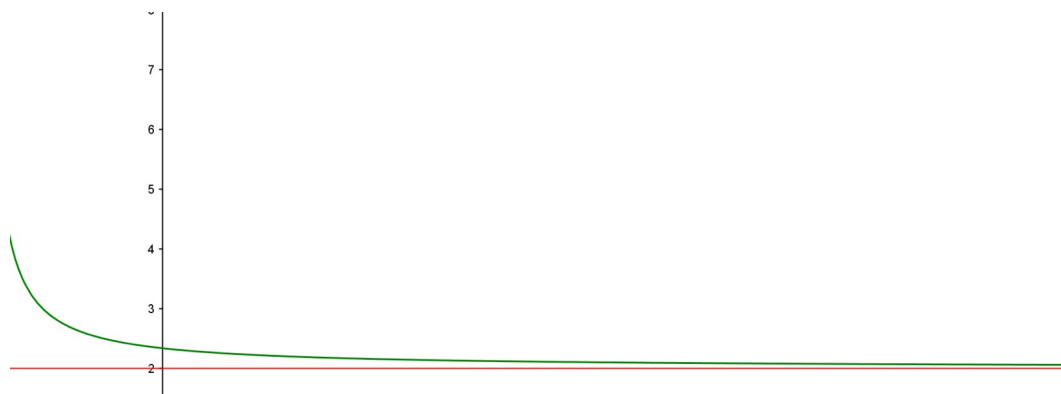
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient les valeurs de $f(x)$ dès que x est négatif et assez grand en valeur absolue.

Remarque : l'expression « étudier f au voisinage de $+\infty$ » signifie que l'on étudie la fonction f sur un intervalle de la forme $]\alpha; +\infty[$

Définition : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ alors on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote à la courbe représentative de f , C_f , au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Cela signifie que C_f se rapproche de plus en plus de son asymptote sans jamais la toucher.

Remarque : Ces définitions sont analogues à celles rencontrées pour les limites de suites en remplaçant « dès que x est assez grand » par « à partir d'un certain rang ».

Exemple : ci-dessous, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. La droite $(d): y = 2$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

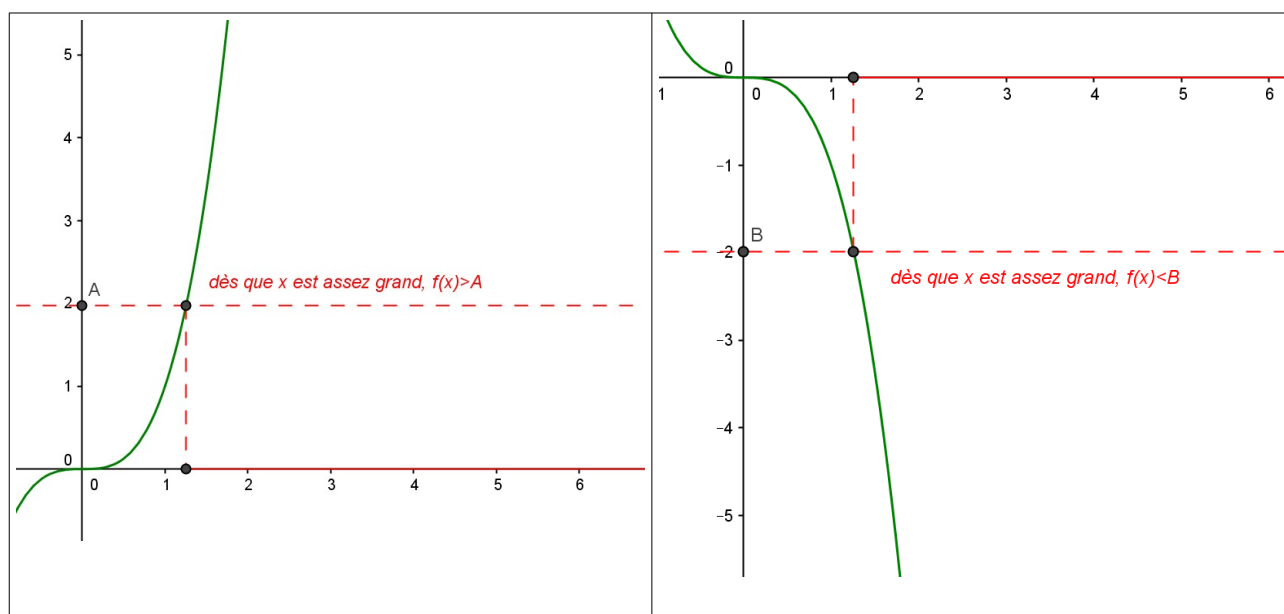


(b) Limite infinie d'une fonction au voisinage de l'infini

Définition :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $] -\infty; B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand.

Exemple d'interprétation graphique :



2. Limites d'une fonction f au voisinage d'un réel a

Définition : Soit f définie sur $[a-r; a[$ ou $]a; a+r]$ avec $r > 0$ réel

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $] -\infty; B[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

Remarque :

- Lorsque x tend vers a par valeurs inférieures à a , on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ et on parle de limite à gauche en a .
- De même, lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ et on parle de limite à droite en a .

Exercice 1 :

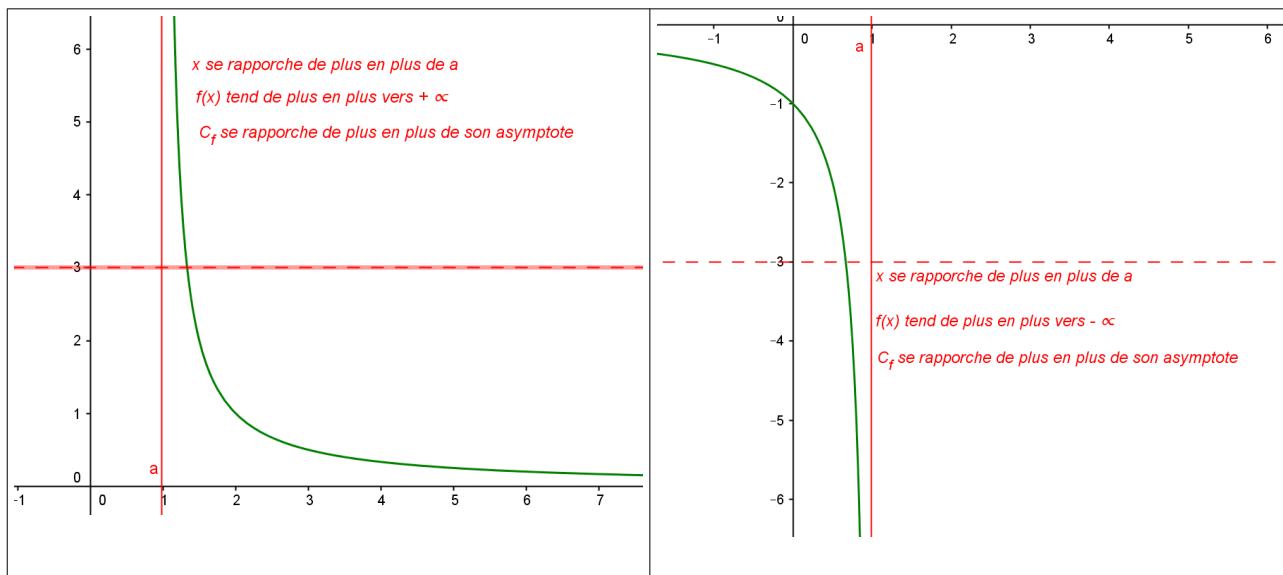
f est définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

1. Comment choisir x pour que $f(x) > 100$? pour que $f(x) > 1000$?
En déduire une conjecture de la limite de f en 3.
2. A étant un réel positif fixé, comment choisir x pour que $f(x) > A$?
En déduire la limite de f en 3.

Définition : Soit f définie sur $[a-r; a[$ ou $]a; a+r]$ avec $r > 0$ réel .
La droite d'équation $x=a$ est une asymptote à C_f si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Remarque : La droite d'équation $x=a$ est dite asymptote verticale à C_f .

Exemple d'interprétation graphique



Propriété admise pour les fonctions usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k, \text{ avec } k \text{ réel}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}, \text{ avec } a \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \text{ avec } a > 0$$

Exercice 2 :

f est définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

C_f est sa courbe représentative et son tableau de variation est donné ci-dessous :

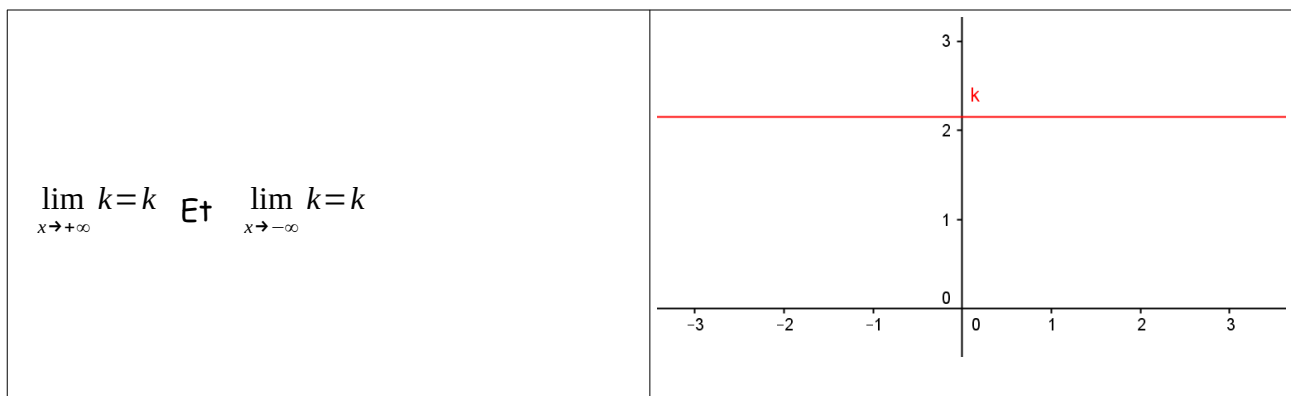
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	1	0,75	$+\infty$	1

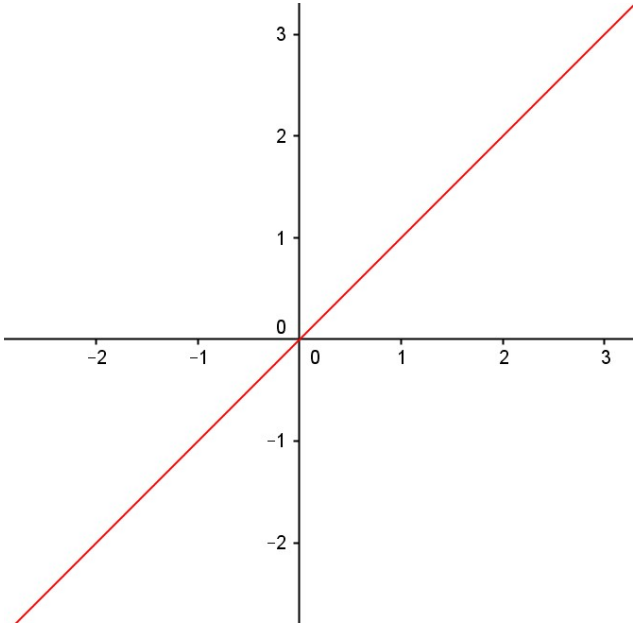
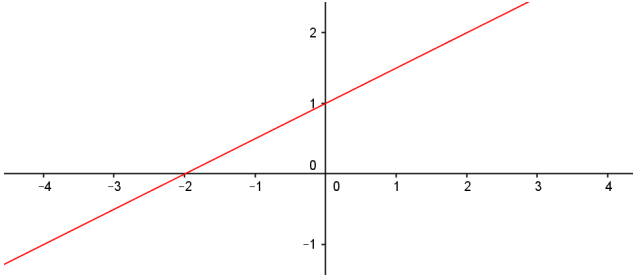
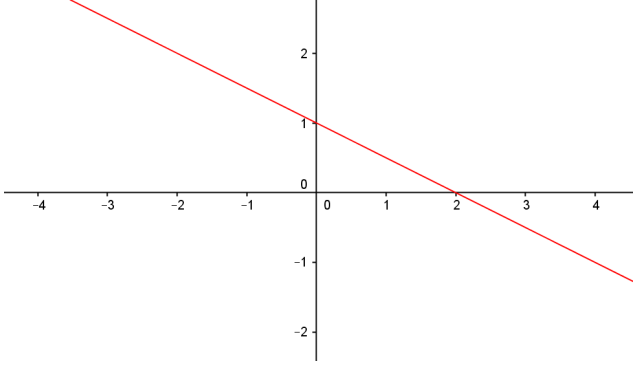
Diagramme de variation : une flèche descendante de 1 à 0,75, une flèche ascendante de 0,75 à $+\infty$, et une flèche descendante de $+\infty$ à 1.

1. Lire dans le tableau de variation, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire l'existence de deux asymptotes à C_f .
2. Avec la calculatrice, représenter C_f et son asymptote horizontale D . Conjecturer la position de C_f par rapport à D . Démontrez cette conjecture.

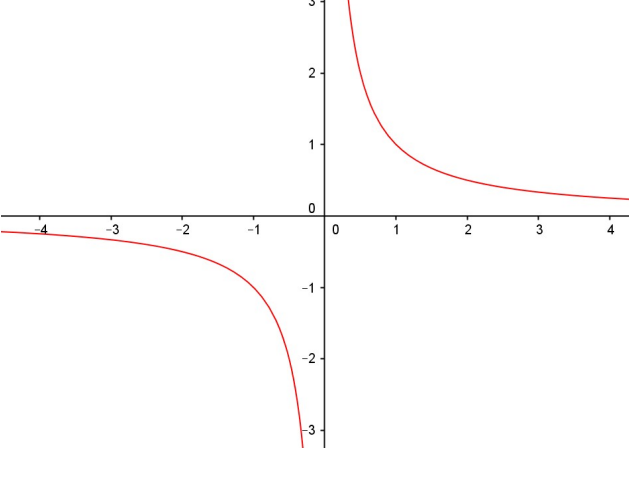
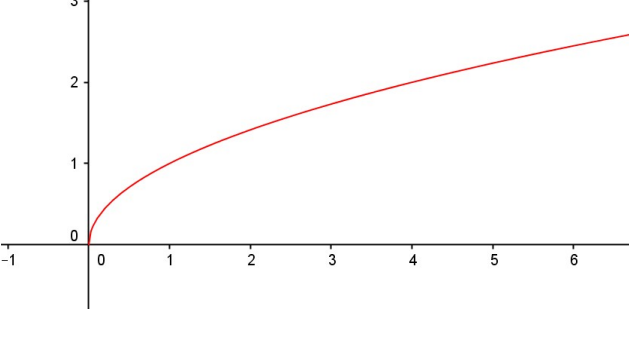
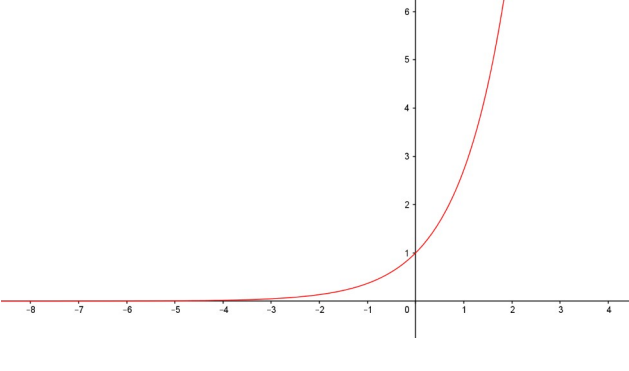
II. Théorèmes généraux sur les limites

1. Limites des fonctions usuelles au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$	
<p>Si $a > 0$</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax + b = +\infty \quad \text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax + b = -\infty$	
<p>Si $a < 0$</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax + b = -\infty \quad \text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax + b = +\infty$	

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$	
<p>Plus généralement si n est pair</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ <p>si n est impair</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	

Preuve exigible au programme - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Comme $e > 1$, la suite géométrique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = e^n$ diverge vers $+\infty$ donc, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $e^n > A$.

On déduit que pour tout réel $x \geq n_0$ on a $e^x \geq e^{n_0}$ car la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} donc $e^x \geq e^{n_0} > A$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. #

2. Théorèmes généraux sur les limites

L et L' sont des réels et le réel a peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$
 f et g désignent des fonctions

Ind. désigne « Forme Indéterminée ».

(a) Limites de fonctions de référence

Fonction constante	$\lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$			
Fonction puissance avec $n \in \mathbb{N}^*$	Si n est pair $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	Si n est impair $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$		
Fonction puissance inverse avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	Si n est pair $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	Si n est impair $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
Fonction exponentielle	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$			
Fonction racine carrée	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$			

(b) Limites d'une somme de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Ind.

(c) Limites d'un produit de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
alors $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$ si $L > 0$ $-\infty$ si $L < 0$	$-\infty$ si $L > 0$ $+\infty$ si $L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Ind.

(d) Limites d'un quotient de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	L'	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	$+\infty$ ou $-\infty$ *	0	$+\infty$ ou $-\infty$	Ind.	Ind.

* Le choix entre $+\infty$ ou $-\infty$ est déterminé par le signe de $f(x)$ et celui de $g(x)$

Remarques :

- Les théorèmes sont similaires à ceux pour les suites
- La règle des signes s'applique aux limites « infinies »

Exercice 3 :

Calculer, en justifiant, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2-x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - 2\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 8x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x + 3)$$

Exercice 4 :

f est la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x-9}{3-x}$

1. Calculer la limite de f en 3
2. Démontrer que $f(x) = -2 - \frac{3}{3-x}$ puis calculer la limite de f en $+\infty$

Exercice 5 :

Ci-contre, on donne le tableau de variation d'une fonction f

g est la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	-2	0

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)}$

III. D'autres règles de calcul sur les limites

1. Limites en l'infini d'une fonction polynôme

Propriété : La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son terme de plus haut degré.

Exercice 6 :

Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x) = 5x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = -2x^3 + 2x^2 - 5x + 7$

2. Limites en l'infini du quotient de deux fonctions polynômes

Propriété : La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exercice 7 :

Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x) = \frac{2}{x-1}$; $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$; $h(x) = \frac{3x^2+2}{1-x}$

3. Limites d'une fonction composée

Certaines fonctions ne peuvent pas être écrites comme une somme, un produit ou un quotient de fonctions usuelles. Une autre opération sur les fonctions existe : la composition

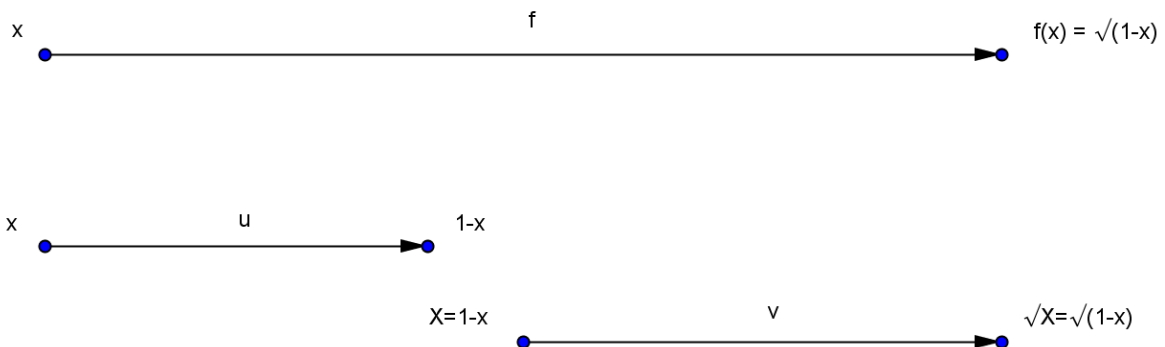
Remarque : cette année, il ne s'agit pas d'étudier la composition de fonctions en détail mais d'approcher simplement la notion.

Exemple : soit f la fonction définie sur $] -\infty; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Pour calculer $f(x)$, on calcule d'abord $1-x$ puis la racine du nombre obtenu.

f est par conséquent l'enchaînement de deux fonctions : la fonction $u :] -\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 1-x$ et la fonction $v : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : X \rightarrow \sqrt{X}$.

On a $f(x) = v(1-x) = v(u(x))$. On schématise la composée ainsi :



Remarque : on notera alors $f = v \circ u$ ou encore $f(x) = (v \circ u)(x)$

Définition : v est une fonction définie sur un intervalle J et u est une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I , $u(x)$ appartient à J .
 La fonction composée u suivie de v , notée $v \circ u$ est la fonction f définie sur I par $f(x) = v(u(x))$

Théorème : Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et si $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$
 a, b et c peuvent être des réels, ou $+\infty$ ou $-\infty$

Remarque : ce théorème est admis

Exercice 8 :

f est la fonction définie sur $] -\infty; -3[$ par $f(x) = \left(\frac{2x}{x+3}\right)^5$

Écrire f comme composée de deux fonctions puis déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 9 :

Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \sqrt{\frac{1}{x-3}}$ en détaillant les différentes étapes.

Preuve exigible au programme - $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} \text{ en posant } X = -x ;$$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = 0$ donc par compositions de limites on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. #

IV. Théorèmes de comparaison

Les théorèmes suivants sont énoncés avec les limites quand x tend vers $+\infty$ mais on pourrait également les énoncer :

- quand x tend vers $-\infty$ auquel cas on remplacerait $[\alpha; +\infty[$ par $]-\infty; \beta]$
- quand x tend vers un réel a auquel cas on remplacerait $[\alpha; +\infty[$ par un intervalle $[a-r; a[$ ou $]a; a+r]$ avec r réel strictement positif.

Théorèmes :

1. Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha; +\infty[$, f et g sont définies et si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
2. Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha; +\infty[$, f et g sont définies et si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Application : démontrons, par comparaison de limite, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Preuve :

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x$. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$. f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$.

Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} et $e^0 = 1$ donc $\forall x \geq 0, e^x \geq 1$ donc $\forall x \geq 0, f'(x) \geq 0$ donc f croissante sur $[0; +\infty[$. Par conséquent $\forall x \geq 0, e^x \geq x$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ d'après le théorème de comparaison des limites. #

Théorème des gendarmes :

Si pour tout réel x appartenant à un intervalle $[\alpha; +\infty[$, f, g et h sont définies et si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$

Exercice 10 :

f est une fonction définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout réel x , $-1 \leq f(x) \leq 1$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(x))$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(x))$

IV. Croissances comparées de limites

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$2/ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Preuve exigible au programme :

1. Pour $n=1$.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

f est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme différence de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ et $\forall x \geq 0, f'(x) = e^x - x$.

f' est aussi dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall x \geq 0, f''(x) = e^x - 1 \geq 0$ donc f' est croissante sur \mathbb{R}^+ donc $\forall x \geq 0, f'(x) \geq f'(0) = 1 > 0$ donc f est croissante sur \mathbb{R}^+ donc $\forall x \geq 0, f(x) \geq f(0) = 1 > 0$ donc

$$\forall x > 0, e^x - \frac{x^2}{2} > 0 \text{ donc } e^x > \frac{x^2}{2} \text{ donc } \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par le théorème de comparaison des limites.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

2. Pour $n \geq 2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(\frac{e^x}{n}\right)^n}{\left(n \times \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{e^x}{n \times \frac{x}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^x}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\frac{x}{n}} = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$

et comme $\frac{1}{n} > 0$ on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$. #