Exercice 1 :

f est définie sur $]3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

1. Comment choisir x pour que $f(x)>100$? pour que $f(x)>1000$?
   En déduire une conjecture de la limite de f en 3.
2. A étant un réel positif fixé, comment choisir x pour que $f(x)>A$?
   En déduire la limite de f en 3.

Correction

1. Soit $x>3$. $f(x)>100 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3}>100 \Leftrightarrow x-3<\dfrac{1}{100} \Leftrightarrow x<3+\dfrac{1}{100} \Leftrightarrow x<3{,}01$

   Conclusion : $f(x)>100 \Leftrightarrow 3<x<3{,}01$

   Soit $x>3$. $f(x)>1000 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3}>1000 \Leftrightarrow x-3<\dfrac{1}{1000} \Leftrightarrow x<3+\dfrac{1}{1000} \Leftrightarrow x<3{,}001$

   Conclusion : $f(x)>1000 \Leftrightarrow 3<x<3{,}001$

2. Soit $x>3$ et $A>0$. $f(x)>A \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3}>A \Leftrightarrow x-3<\dfrac{1}{A} \Leftrightarrow x<3+\dfrac{1}{A}$

   Conclusion : $\forall A>0, f(x)>A \Leftrightarrow 3<x<3+\dfrac{1}{A}$

Exercice 2 :

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

C_f est sa courbe représentative et son tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	$0{,}75$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

1. Lire dans le tableau de variation, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire l'existence de deux asymptotes à C_f .
2. Avec la calculatrice, représenter C_f et son asymptote horizontale D .
   Conjecturer la position de C_f par rapport à D . Démontrez cette conjecture.

Correction

1. A l'aide du tableau de variations, on déduit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1;\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

On déduit que C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'une asymptote verticale d'équation $x=0$.

2. A l'aide de la calculatrice, il semble que C_f soit située en-dessous de son asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ et au-dessus de son asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 :
Calculer, en justifiant, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(2-x) \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-2\right) \qquad \lim_{x \to -\infty} (2x^2-8x) \qquad \lim_{x \to -\infty} (x^3+2x+3)$$

Correction

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}(2-x)=-\infty$ comme produit de limites usuelles avec :

  $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}=+\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (2-x)=-\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-2\right)=-\infty$ comme produit de limites avec :

  $\lim_{x \to +\infty} x^2=+\infty$ (usuelle) et $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}-2\right)=-2$ (somme de limites usuelles)

- $\lim_{x \to -\infty} (2x^2-8x)=+\infty$ comme somme de limites usuelles avec :

  $\lim_{x \to -\infty} 2x^2=+\infty$ avec 2>0 et $\lim_{x \to -\infty} -8x=+\infty$ avec -8<0

- $\lim_{x \to -\infty} (x^3+2x+3)=-\infty$ comme somme de limites usuelles avec :

  $\lim_{x \to -\infty} x^3=-\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} 2x+3=-\infty$

Exercice 4 :

f est la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-9}{3-x}$.

1. Calculer la limite de f en 3
2. Démontrer que $f(x)=-2-\dfrac{3}{3-x}$ puis calculer la limite de f en $+\infty$.

Correction

1. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-9}{3-x}=+\infty$ comme quotient de limites usuelles avec :

$\lim\limits_{x\to 3^+} 2x-9=-3<0$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} 3-x=0^-$

2. Soit $x>3$, on a $-2-\dfrac{3}{3-x}=\dfrac{-2(3-x)}{3-x}-\dfrac{3}{3-x}=\dfrac{-6+2x-3}{3-x}=\dfrac{2x-9}{3-x}=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} -2-\dfrac{3}{3-x}=-2$ comme somme de limites avec :

$\lim\limits_{x\to +\infty} -2=-2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3}{3-x}=0$ comme quotient de limites usuelles avec

$\lim\limits_{x\to +\infty} -3=-3$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 3-x=0$

Exercice 5 :

Ci-contre, on donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	$+\infty$
f	-2 $\nearrow$	0

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{g(x)}$

Correction

D'après le tableau de variations, on a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-2$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$ par passage à l'inverse de limite.

De même, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0^-$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ par passage à l'inverse de limite.

Exercice 6 :
Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x)=5x^2-2x+3$ et $g(x)=-2x^3+2x^2-5x+7$

Correction

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 5x^2-2x+3=+\infty$ comme somme de limites usuelles.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 5x^2-2x+3$ est une FI du type $+\infty-\infty$.

  Or $\lim_{x\to+\infty} 5x^2-2x+3=\lim_{x\to+\infty} x^2(5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})=+\infty$ comme produit de limites avec :

  $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})=5>0$ comme somme de limites usuelles avec :

  $$\lim_{x\to+\infty} 5=5 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0$$

- Par un raisonnement analogue, on montre que $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

Exercice 7 :

Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x)=\frac{2}{x-1}$; $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$; $h(x)=\frac{3x^2+2}{1-x}$

Correction

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x-1}=0^-$ comme quotient de limites avec :

  $\lim\limits_{x\to-\infty} 2=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$

- De même, par un raisonnement analogue, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x-1}=0^+$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x-1}$ est une FI du type $\frac{-\infty}{-\infty}$.

  Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$ comme quotient de limites avec :

  $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{2}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}=1$ comme somme de limites usuelles

- De même, par un raisonnement analogue, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2}{1-x}$ est une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.

  Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2(3+\frac{2}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(3+\frac{2}{x^2})}{(\frac{1}{x}-1)}=+\infty$ comme quotient de limites avec :

  $\lim\limits_{x\to-\infty} x(3+\frac{2}{x^2})=-\infty$ comme produit de limites avec :

  $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ (usuelle) et $\lim\limits_{x\to-\infty} (3+\frac{2}{x^2})=3$ comme somme de limites usuelles

  et $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{x}-1)=-1$ comme somme de limites usuelles.

- De même, par un raisonnement analogue, on montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$.

Exercice 8 :

f est la fonction définie sur $]-\infty;-3[$ par $f(x)=(\frac{2x}{x+3})^5$

Écrire f comme composée de deux fonctions puis déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Correction

$$\forall x<-3, f(x)=(\frac{2x}{x+3})^5=(v\circ u)(x) \text{ avec } u(x)=\frac{2x}{x+3} \text{ et } v(X)=X^5$$

$\lim\limits_{x\to -3^-} u(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{2x}{x+3}=+\infty$ comme quotient de limites avec $\lim\limits_{x\to -3^-} 2x=-6$ et $\lim\limits_{x\to -3^-} x+3=0^-$.

$\lim\limits_{X\to +\infty} v(X)=\lim\limits_{X\to +\infty} X^5=+\infty$

Par composition de limites, on déduit que $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}(v\circ u)(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}(\frac{2x}{x+3})^5=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{x+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{x(1+\frac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{(1+\frac{3}{x})}=2$ comme quotient de limites avec :

$\lim\limits_{x\to +\infty} 2=2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{3}{x})=1$ comme somme de limites avec $\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{1}{x})=0$ (usuelle)

$\lim\limits_{X\to 2} v(X)=\lim\limits_{X\to 2} X^5=32$

Par composition de limites, on déduit que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(v\circ u)(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\frac{2x}{x+3})^5=32$

Exercice 9 :

Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$ en détaillant les différentes étapes.

Correction

$\forall x>3, f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-3}}=(v\circ u)(x)$ avec $u(x)=\dfrac{1}{x-3}$ et $v(X)=\sqrt{X}$

$\lim\limits_{x\to 3^+} u(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$ comme quotient de limites avec $\lim\limits_{x\to 3^+} 1=1$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0^+$.

$\lim\limits_{X\to +\infty} v(X)=\lim\limits_{X\to +\infty}\sqrt{X}=+\infty$

Par composition de limites, on déduit que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(v\circ u)(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{\dfrac{2x}{x+3}}=+\infty$.

Exercice 10 :

f est une fonction définie sur ℝ telle que, pour tout réel x , $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+f(x))$ $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+f(x))$

Correction

- Calcul de $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Soit $x>0$. On a $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{f(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}-\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ d'après le théorème des gendarmes.

- Calcul de $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+f(x))$

Soit $x>0$. On a $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ donc $x-1\leqslant x+f(x)$.

Or $\lim\limits_{x\to +\infty} x-1=+\infty$ (usuelle) donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x+f(x)=+\infty$ d'après le théorème de comparaison.

- Calcul de $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+f(x))$

Soit $x>0$. On a $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ donc $x+f(x)\leqslant x+1$.

Or $\lim\limits_{x\to -\infty} x+1=-\infty$ (usuelle) donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)+x=-\infty$ d'après le théorème de comparaison.