Chapitre 3 : Notion de matrices

I. Généralités sur les matrices

1. Définitions

Définition : Une **matrice** de taille $n \times p$ est un tableau de nombres réels formé de *n* lignes et *p* colonnes. Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarques :

- *On note une telle matrice également sous la forme* $(a_{i,j})$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.
- *Le coefficient* $(a_{i,j})$ *désigne le coefficient situé sur la i-ième ligne et j-ième colonne.*
- *On peut aussi définir des matrices à coefficients complexes.*

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0,5 & 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes donc de taille 2 x 3.

2. Matrices particulières

Matrices particulières :

- Une matrice de taille $1 \times p$ est appelée une matrice ligne.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée une matrice colonne.
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée une matrice carrée.
- Une matrice carrée telle que de taille $n \times n$ dont tous les termes $(a_{i,j})_{i \neq j}$ sont nuls et dont les termes $(a_{i,i})$ sont non tous nuls est appelée matrice diagonale.
- La matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée matrice identité d'ordre n et notée I_n.
- Une matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle et notée $O_{n,p}$.

Remarques :

- *On note* $Diag(d_1; d_2; \dots; d_n)$ *la matrice diagonale d'ordre* n *dont les coefficients diagonaux sont respectivement* $d_1; d_2; \dots; d_n$.
- *La matrice nulle carrée d'ordre n est notée* O_n .

Exercice 1 : Pour chacune des matrices suivantes, préciser sa taille et la dénommer correctement.

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition : Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et ont des coefficients égaux placés aux mêmes positions autrement dit deux matrices $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ de taille $n\times p$ sont égales lorsque :

$$\forall i\in\{1;2;...;n\} \text{ et } j\in\{1;2;...;p\}, a_{i,j}=b_{i,j}$$

Définition : Une matrice carrée d'ordre n , $A=(a_{i,j})$, est dite symétrique lorsque

$$\forall (i,j)\in\{1;2;...;n\}^2, a_{i,j}=a_{j,i}$$

Exemple : $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

Définition : On appelle matrice transposée d'une matrice carrée d'ordre n , $A=(a_{i,j})$, la matrice notée ${}^tA=(a_{j,i})$.

Exemple : La matrice transposée de la matrice $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -7 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est ${}^tA=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

II. Opérations sur les matrices

1. Somme de deux matrices

Définition : Soient $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ deux matrices de taille $n\times p$.
La somme des matrices A et B notée $A+B$ est la matrice $C=(c_{i,j})$ de taille $n\times p$ telle que, pour tous $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p, c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

Remarque : on obtient ainsi la somme de deux matrices de même taille en additionnant les coefficients de même emplacement .

Exercice 2 : Soients $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix}$. Calculer $A+B$.

2. Produit d'une matrice par un réel

Définition : Soient $A=(a_{i,j})$ une matrice de taille $n\times p$ et λ un réel.
Le produit de la matrice A par le réel λ noté λA , est la matrice $M=(m_{i,j})$ de taille $n\times p$ telle que pour tous $1\leqslant i\leqslant n$ et $1\leqslant j\leqslant p, m_{i,j}=\lambda\times a_{i,j}$.

Remarque : on obtient la matrice λA en multipliant tous les coefficients de A par λ .

Exercice 3 : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$. Calculer $2A$.

3. Opposée d'une matrice

Définition : On appelle opposée de la matrice $A=(a_{i,j})$, la matrice notée $-A=(-a_{i,j})$.

Exercice 4 : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$. Calculer la matrice opposée de A .

Définition : On définit ainsi la différence de deux matrices $A-B$ par $A-B=A+(-B)$.

Exercice 5 : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix}$. Calculer $A-B$.

Remarque : l'égalité $M+A=B$ équivaut à l'égalité $M=B-A$.

4. Premières propriétés sur les opérations sur les matrices

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices de même taille et α et β deux réels. On a :

- $A+B=B+A$: commutativité de la somme de matrices
- $A+(B+C)=(A+B)+C$: associativité de la somme de matrices
- $1\times A=A\times 1=A$
- $(\alpha+\beta)\times A=\alpha A+\beta A$
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

Preuves en exercices

Exercice 6 : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ -3 & -3 & -1\end{pmatrix}$. Calculer $3A-5B$.

5. Produit de deux matrices

Définition :

Soient $L=(l_{1,1} l_{1,2} \dots l_{1,n})$ une matrice ligne de taille $1\times n$ et $C=\begin{pmatrix}c_{1,1}\\ c_{2,1}\\ \dots\\ c_{n,1}\end{pmatrix}$ une matrice colonne de taille $n\times 1$. Alors le produit $L\times C$ est le nombre réel défini par :

$$L\times C=\begin{pmatrix}l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,n}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_{1,1}\\ c_{2,1}\\ \dots\\ c_{n,1}\end{pmatrix}=l_{(1,1)}\times c_{1,1}+l_{(1,2)}\times c_{2,1}+\dots+l_{(1,n)}\times c_{n,1}$$

Remarque : pour que le produit $L\times C$ soit défini, L doit avoir autant de colonnes que C a de lignes.

Exercice 7 : Soit $L=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}8\\ -3\\ -2\end{pmatrix}$. Calculer $L\times C$.

Définition : Si $A=(a_{i,j})$ une matrice de taille $m\times n$ et $B=(b_{i,j})$ une matrice de taille $n\times p$, le produit des matrices A et B noté $A\times B$ ou AB est la matrice $C=(c_{i,j})$ de taille $m\times p$ telle que , pour tous $1\leqslant i\leqslant m$ et $1\leqslant j\leqslant p, c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\times b_{k,j}$, autrement dit, l'élément $c_{i,j}$ est le produit de la $i-\text{ième}$ ligne de A par la $j-\text{ième}$ colonne de B .

Attention : Le produit matriciel n'est pas commutatif, c'est à dire, lorsque $A\times B$ et $B\times A$ sont définis, on a en général $A\times B\neq B\times A$.

6. Propriétés sur les produits de matrices

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices et λ un réel.
Sous réserve de définition des produits de matrices, on a :

- $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$: la multiplication est associative
- $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ *et* $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$: la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- $(\lambda A)\times B=\lambda A\times B$ *et* $A\times(\lambda B)=\lambda A\times B$
- $I_n\times A=A\times I_n=A$

7. Puissances d'une matrice

Propriétés : Soients A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul.
La puissance $k-\text{ième}$ de A notée A^k est la matrice $A^k=\underbrace{A\times A....\times A}_{k\,fois}$.

Remarque : Si A est non nulle alors $A^0=I_n$.

Exercice 8 : Soit $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\1 & -5 & 0\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & -1\\-2 & -3\end{pmatrix}$ quatre matrices.
Calculer, lorsque cela est possible, les produits $A\times B, A\times C, C\times D$ et $B\times C$.

Remarque : une méthode pratique pour calculer le produit de deux matrices :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ M=C\times D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-19} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{m_{1,1}=2\times 1+3\times 4+(-1)\times(-2)=16}$$
$$\boldsymbol{m_{1,2}=2\times 0+3\times(-1)+(-1)\times(-3)=0}$$
$$\boldsymbol{m_{2,1}=1\times 1+(-5)\times 4+0\times(-2)=-19}$$
$$\boldsymbol{m_{2,2}=1\times 0+(-5)\times(-1)+0\times(-3)=5}$$

III. Inverse d'une matrice et résolution de système

1. Inverse d'une matrice

Définition : Une matrice carrée A de taille n est inversible lorsqu'il existe une matrice B de taille n telle que $A\times B=B\times A=I_n$.

Définition : Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le déterminant de A est le réel, noté $det(A)$, défini par $det(A)=ad-bc$.

Propriété : Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
En particulier, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve (admise)

2. Résolution d'un système

Propriété (admise) : Soient A une matrice carrée de taille n et X et B deux matrices colonnes à n lignes.
Si A est inversible alors le système d'écriture matricielle $AX=B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X=A^{-1}\times B$.

Exercice 9 : On considère le système $(S):\begin{cases} 6x+2y=3 \\ -8x+5y=12 \end{cases}$.

1. Écrire (S) sous la forme matricielle $AX=B$.
2. Résoudre, si possible, le système (S) . Justifier.

Exercice 10 : Résoudre le système $(S):\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=17 \end{cases}$.