

Exercice 1 : Pour chacune des matrices suivantes, préciser sa taille et la dénommer correctement.

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix}$  est de taille 1x3 et est une matrice ligne.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  est de taille 2x1 et est une matrice colonne.

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est de taille 2x2 et est une matrice carré.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est de taille 3x3 et est la matrice carré identité  $I_3$ .

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est de taille 3x3 et est la matrice carré nulle  $O_3$ .

Exercice 2 : Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A+B$ .

Correction

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+4 & -5+3 & 0+2 \\ 2-3 & 3-3 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  . Calculer  $2A$  .

Correction

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-5) & 2 \times 0 \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  . Calculer la matrice opposée de  $A$  .

Correction

La matrice opposée de  $A$  est la matrice  $-A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$  .

Exercice 5 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$  . Calculer  $A - B$  .

Correction

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-4 & -5-3 & 0-2 \\ 2-(-3) & 3-(-3) & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$  . Calculer  $3A - 5B$  .

Correction

$$3A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -15 & -15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -30 & -10 \\ 21 & 24 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Soit  $L = (4 \ 2 \ 1)$  et  $C = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $L \times C$ .

Correction

$L$  est une matrice de taille  $1 \times 3$  et  $C$  est une matrice de taille  $3 \times 1$  donc le produit  $L \times C$  est une matrice de taille  $1 \times 1$  c'est à dire un réel.

$$L \times C = 4 \times 8 + 2 \times (-3) + 1 \times (-2) = 32 - 6 - 2 = 24$$

Exercice 8 : Soit  $A = (2 \ 3 \ -1)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  quatre matrices. Calculer, lorsque cela est possible, les produits  $A \times B$ ,  $A \times C$ ,  $C \times D$  et  $B \times C$ .

Correction

- $A$  et  $B$  sont respectivement de taille  $1 \times 3$  et  $3 \times 1$  donc le produit  $A \times B$  est calculable et de taille  $1 \times 1$  c'est à dire est un réel.

$$A \times B = (2 \ 3 \ -1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 3 \times 4 - 1 \times (-2) = 2 + 12 + 2 = 16$$

- $A$  et  $C$  sont respectivement de taille  $1 \times 3$  et  $2 \times 3$  donc le produit  $A \times C$  n'est pas calculable.
- $C$  et  $D$  sont respectivement de taille  $2 \times 3$  et  $3 \times 2$  donc le produit  $A \times C$  est calculable et de taille  $2 \times 2$  c'est à dire est une matrice carrée d'ordre 2.

$$C \times D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -19 & 5 \end{pmatrix}$$

- $B$  et  $C$  sont respectivement de taille  $3 \times 1$  et  $2 \times 3$  donc le produit  $B \times C$  n'est pas calculable.

Exercice 9 : On considère le système  $(S): \begin{cases} 6x+2y=3 \\ -8x+5y=12 \end{cases}$ .

1. Écrire  $(S)$  sous la forme matricielle  $AX=B$ .
2. Résoudre, si possible, le système  $(S)$ . Justifier.

Correction

1.  $(S) \Leftrightarrow AX=B$  avec  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ .

2.  $\det(A) = 6 \times 5 - (-8) \times 2 = 30 + 16 = 46 \neq 0$  donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ .

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \Leftrightarrow X = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} -9 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{46} \\ \frac{96}{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{46} \\ \frac{48}{23} \end{pmatrix}$$

Conclusion :  $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-9}{46} \\ \frac{48}{23} \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 10 : Résoudre le système  $(S): \begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=17 \end{cases}$ .

Correction

1.  $(S) \Leftrightarrow AX=B$  avec  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$

2.  $\det(A) = 5 \times 3 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$  donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ .

$$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Leftrightarrow X=A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \Leftrightarrow X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Conclusion :  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$