Exercice 1

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=900$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=0{,}6u_n+200$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n=u_n-500$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
3. Préciser les variations de la suite (v_n) puis celles de (u_n) .
4. Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire que $u_n=400\times0{,}6^n+500$.
5. Déterminer la limite de la suite (v_n) . En déduire la limite de la suite (u_n) .

Partie B

Dans un pays, deux sociétés A et B se partagent le marché des télécommunications. Les clients souscrivent, le 1er janvier soit auprès de A, soit auprès de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres à nouveau de choisir A ou B. L'année 2010, la société A détient 90% du marché et la société B, 10%. On estime que, chaque année, 20% de la clientèle de A change pour B, et de même 20% de la clientèle de B change pour A. On considère une population représentative de 1000 clients de l'année 2010 et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note a_n le nombre de clients de A pour l'année 2010 + *n*.

1. Déterminer a_0 le nombre de clients de la société A en 2010, puis vérifier que $a_1=740$.
2. Établir que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=0{,}8a_n+0{,}2(1000-a_n)$.
3. En déduire que $a_{n+1}=0{,}6a_n+200$.
4. En utilisant la partie A, déterminer l'évolution du marché des télécommunications dans ce pays.

Exercice 2

Un capital *C* emprunté au taux mensuel de *t* %, remboursé par mensualités fixes, conduit à l'élaboration d'un plan de remboursement. Si R_n représente le capital dû au bout de *n* années, la suite (R_n) est une suite définie par la relation $R_{n+1}=(1+t)R_n-A$, où *A* est le montant d'une annuité (c'est à dire le montant du remboursement annuel).

Paul souhaite emprunté 50 000€ pour financer des travaux dans sa maison. Il négocie un prêt au taux de 4% avec sa banque. Paul veut rembourser son prêt en cinq ans. On se propose de calculer les mensualités qu'il devra acquitter.

On nomme *A* le montant d'une annuité correspondant à ce prêt. Si R_n représente le capital dû au bout de *n* années, R_n vérifie donc la relation $R_{n+1}=1{,}04\,R_n-A$.

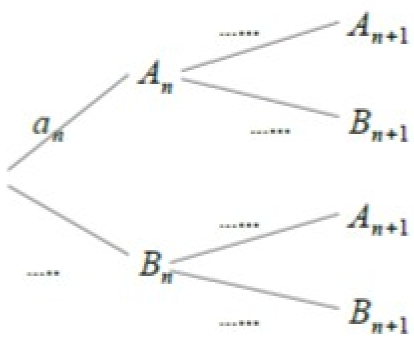
1. Soit S_n la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $S_n=R_n-25\,A$. Démontrer que la suite (S_n) est une suite géométrique de raison 1,04. Déterminer son premier terme.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de *n*.
3. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_n=1{,}04^n\times 50000+25\,A(1-1{,}04^n)$.
4. Si Paul veut rembourser en 5 ans, il doit donc s'acquitter de 5 annuités. Montrer que cela signifie que *A* est la solution de l'équation $1{,}04^5\times 50000+25\,A(1-1{,}04^5)=0$.
5. Résoudre cette équation et en déduire la valeur de *A*.
6. Quel est le montant des mensualités que Paul devra acquitter ?
7. Quel est le coût de ce crédit ?

Exercice 3

Deux joueurs A et B, amateurs d'un jeu vidéo, décident de jouer, toutes les semaines, une partie l'un contre l'autre. La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7. Si A gagne la partie de la semaine *n*, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne alors la partie de la semaine $(n+1)$ est de 0,8. Si A perd la partie de la semaine *n*, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante et, alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine $(n+1)$ est seulement de 0,3.

Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'événement « A gagne la partie de la *n*-ième semaine », par B_n l'événement « B gagne la partie de la *n*-ième semaine », et on note $a_n=p(A_n)$.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous avec les probabilités manquantes.
2. Justifier que, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, $a_{n+1}=0{,}5\,a_n+0{,}3$.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1 par $u_n=a_n-0{,}6$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
4. En déduire l'expression de a_n en fonction de *n*, puis la limite de la suite (a_n) .



Exercice 1

Partie A

1. $u_1=0{,}6u_0+200=0{,}6\times 900+200=740$ et $u_2=0{,}6u_1+200=0{,}6\times 740+200=644$

2. $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=u_{n+1}-500=0{,}6u_n+200-500=0{,}6u_n-300$
   Or, $v_n=u_n-500$ donc $u_n=v_n+500$. On a donc :
   $v_{n+1}=0{,}6(v_n+500)-300=0{,}6v_n+300-300=0{,}6v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=0{,}6$ premier terme $v_0=u_0-500=900-500=400$.

3. La suite (v_n) est géométrique, $0<q<1$ et $v_0=400$ donc la suite est décroissante.
   $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=v_{n+1}+500-v_n-500=v_{n+1}-v_n$.
   Or la suite (v_n) est décroissante donc $v_{n+1}\leq v_n$ donc $v_{n+1}-v_n\leq 0$ donc $u_{n+1}-u_n\leq 0$ donc $u_{n+1}\leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

4. $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=v_0\times q^n=400\times 0{,}6^n$ donc $u_n=v_n+500=400\times 0{,}6^n+500$.

5. La suite (v_n) est géométrique et $-1<0{,}6<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n+500=500$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=500$.

Partie B

1. $a_0=1000\times\frac{90}{100}=900$ $a_1=900\times(1-\frac{20}{100})+\frac{20}{100}\times 100=900\times 0{,}8+20=720+20=740$

2. $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=a_n\times(1-\frac{20}{100})+\frac{20}{100}(1000-a_n)=0{,}8a_n+0{,}2(1000-a_n)$

3. $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=0{,}8a_n+0{,}2(1000-a_n)=0{,}8a_n+200-0{,}2a_n=0{,}6a_n+200$

4. $a_0=900$ et $\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=0{,}6a_n+200$ donc la suite (a_n) est la suite (u_n) de la partie A donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=500$ ce qui signifie que au bout d'un très grand nombre d'année il y aura 500 clients dans la société F ce qui signifie que les deux sociétés vont finir par se partager le marché à part égale.

Exercice 2

1. $\forall n\in\mathbb{N}, S_{n+1}=R_{n+1}-25A=1{,}04R_n-A-25A=1{,}04R_n-26A$
   or, $S_n=R_n-25A$ donc $R_n=S_n+25A$. On a donc :
   $S_{n+1}=1{,}04(S_n+25A)-26A=1{,}04S_n+26A-26A=1{,}04S_n$ donc la suite (S_n) est géométrique de raison $q=1{,}04$ et de premier terme $S_0=R_0-25A=50000-25A$

2. $\forall n\in\mathbb{N}, S_n=S_0\times q^n=(50000-25A)\times 1{,}04^n$

3. $\forall n\in\mathbb{N}, R_n=S_n+25A=(50000-25A)\times 1{,}04^n+25A=50000\times 1{,}04^n-25A\times 1{,}04^n+25A$
   donc $R_n=50000\times 1{,}04^n+25A(1-1{,}04^n)$

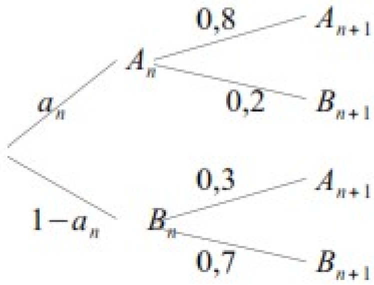
4. Si Paul veut rembourser en 5 ans, cela signifie que $R_5=0$ donc
   $50000\times 1{,}04^5+25A(1-1{,}04^5)=0$

5. $50000\times 1{,}04^5+25A(1-1{,}04^5)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 25(1-1{,}04^5)A=-50000\times 1{,}04^5$
   $\Leftrightarrow\quad A=\dfrac{-50000\times 1{,}04^5}{25(1-1{,}04^5)}\approx 11231{,}36$

6. $\dfrac{A}{12}\approx 935{,}95$ Les mensualités de Paul seront de 935,95€

7. $A\times 5\approx 56156{,}78$ Paul va rembourser en tout 56156,78€ donc le coût du crédit est de 6156,78€

Exercice 3



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements A_n et B_n forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = 0{,}8 \times a_n + 0{,}3 \times (1 - a_n)$

Ainsi $a_{n+1} = 0{,}8\, a_n + 0{,}3 - 0{,}3\, a_n = 0{,}5\, a_n + 0{,}3$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}5\, a_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5\, a_n - 0{,}3$

Or $u_n = a_n - 0{,}6$ donc $a_n = u_n + 0{,}6$ donc $u_{n+1} = 0{,}5(u_n + 0{,}6) - 0{,}3 = 0{,}5\, u_n + 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}5\, u_n$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 0,5 et de 1er terme $u_1 = a_1 - 0{,}6 = 0{,}7 - 0{,}6 = 0{,}1$

La suite (u_n) est géométrique donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_n - 0{,}6$ donc $a_n = u_n + 0{,}6 = 0{,}6 + 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$.

La suite (u_n) est géométrique et $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + 0{,}6 = 0{,}6$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$