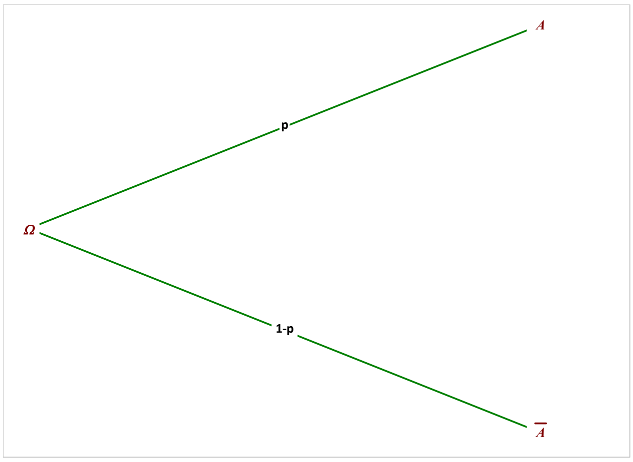
Chapitre 3 : Loi binomiale

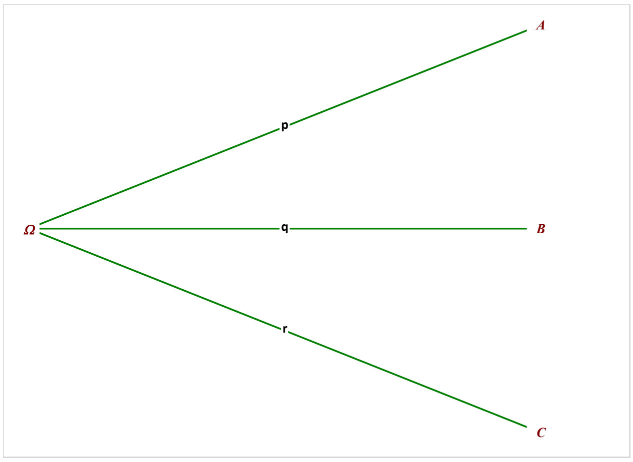
I. Épreuve de Bernoulli

1. Expérience aléatoire à deux ou trois issues

On peut modéliser une expérience aléatoire à deux ou trois issues à l 'aide d'un arbre pondéré. Les différentes issues de l'expérience sont représentées aux extrémités des branches d'un arbre ; la probabilité de chaque issue est inscrite sur la branche conduisant à cette issue.



Expérience à deux issues A et $\overline{A}$



Expérience à trois issues A, B et C
$p + q + r = 1$

2. Succession d'épreuves indépendantes

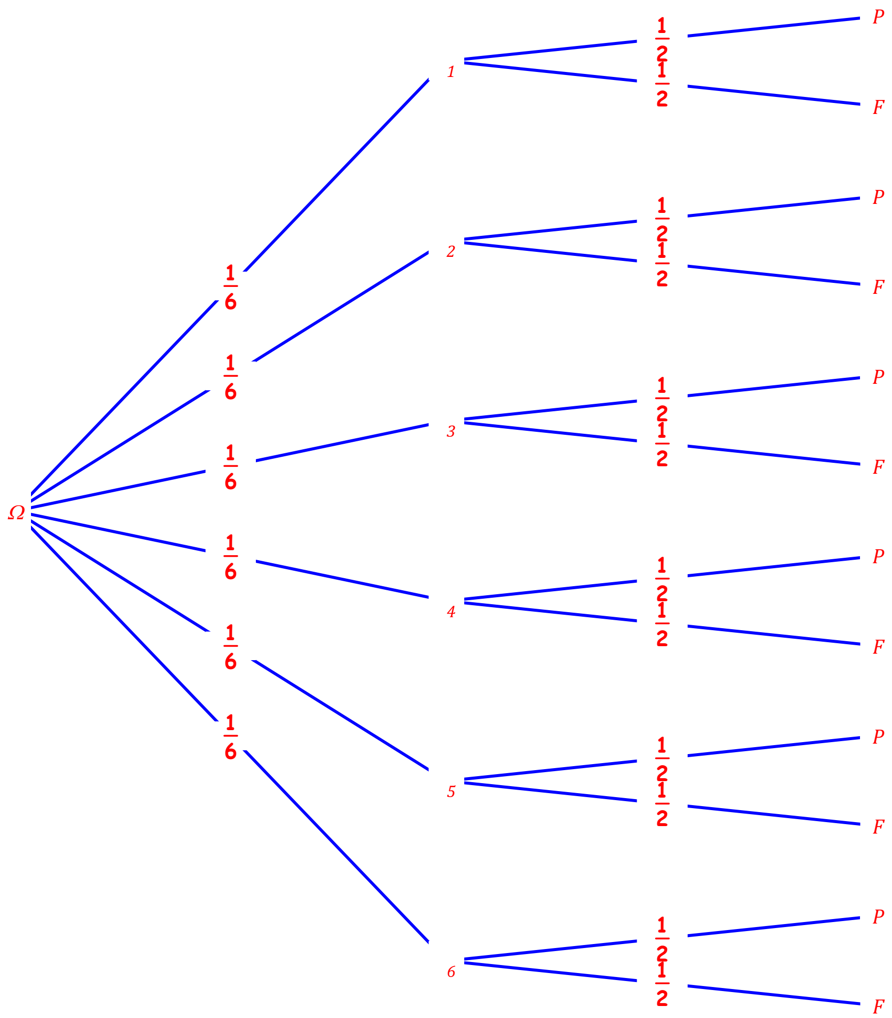
Définition : Deux expériences sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une **n'a aucune influence** sur le résultat de l'autre.

Exemple : L'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à six faces puis une pièce de monnaie non truquée est constituée de deux épreuves indépendantes. Le lancer du dé n'influe pas le lancer de la pièce.

Propriété : La succession de deux épreuves **indépendantes** d'univers respectifs Ω_1 et Ω_2 a pour univers le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Propriété : Dans un arbre pondéré représentant la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est **le produit des probabilités** de chaque résultat.

Exemple : on lance un dé équilibré à six faces puis une pièce de monnaie équilibrée.
La première épreuve consiste à s'intéresser au numéro de la face supérieure du dé et la deuxième épreuve consiste à s'intéresser à la parité de la face visible de la pièce.
L'univers de la première épreuve est $\Omega_1=\{1;2;3;4;5;6\}$.
L'univers de la deuxième épreuve est $\Omega_2=\{P;F\}$.
Ainsi, l'univers de l'expérience aléatoire composée des deux lancers successifs est le produit cartésien
$\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}\times\{P;F\}$
$\Omega=\{(1;P);(2;P);(3;P);(4;P);(5;P);(6;P);(1;F);(2;F);(3;F);(4;F);(5;F);(6;F)\}$.
La probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.
On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :



Remarque : comme les deux épreuves sont indépendantes, sur l'arbre pondéré, les branches du second niveau ne dépendent pas des branches du premier niveau.

Exercice 1 :
On considère une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5. Deux boules sont rouges, les autres sont vertes. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard une boule, à noter son numéro, puis la remettre dans l'urne. On tire ensuite au hasard une seconde boule dont on note la couleur.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Établir la liste des issues possibles. Quelle est la probabilité de l'issue (1;R) ?

3. Épreuve et Loi de Bernoulli

Définition : Une épreuve de Bernoulli de paramètre *p* est une expérience aléatoire présentant deux issues dont l'une nommée communément « Succès » a une probabilité *p* de se réaliser et dont l'autre communément appelée « Échec » a une probabilité *(1-p)* de se réaliser.

(1) La variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelé **variable aléatoire de Bernoulli.**

(2) La loi de probabilité de cette variable aléatoire est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p.**

$X=x_i$	0	1
$P(X=x_i)$	1-p	p

Exemple : on lance d'un dé équilibré et on appelle « Succès » le fait d'obtenir le numéro 5. Cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

Exercice 2 :
Une expérience aléatoire consiste à lancer trois pièces : une pièce est truquée qui tombe deux fois plus souvent sur « Pile » que sur « Face » et deux pièces équilibrées. On modélise cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » lors du lancer de la pièce truquée ?
2. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
4. Déterminer la probabilité de l'événement E : « obtenir une seule fois Pile ».

Propriété : Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors :

$$E(X)=p \;\; ; \;\; V(X)=p(1-p) \;\; et \;\; \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}$$

Preuve : Soit X une variable aléatoire qui suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a :

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=0^2\times(1-p)+1^2\times p-p^2=1-p^2=p(1-p)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}$$ #

II. Loi binomiale

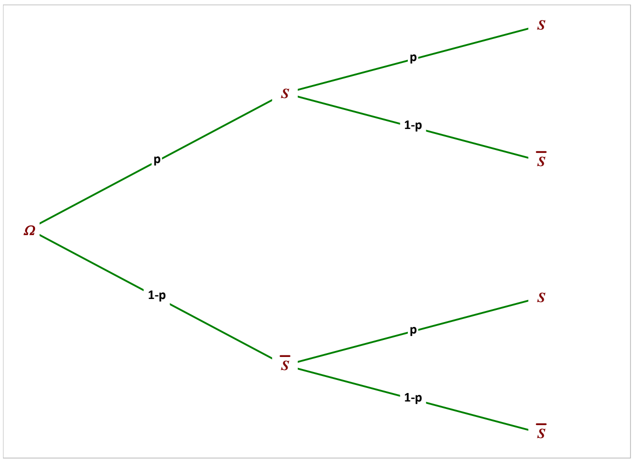
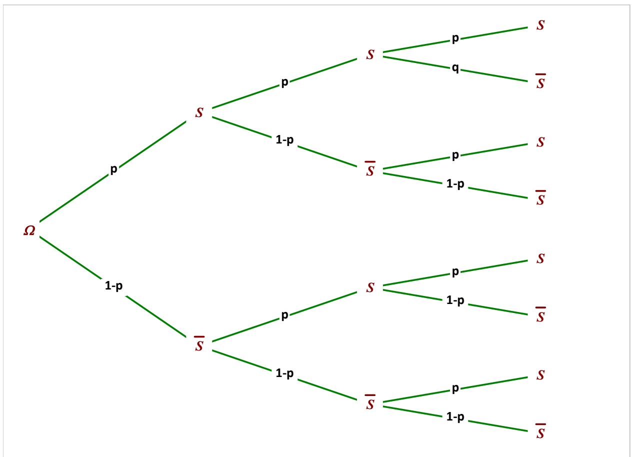
1. Schéma de Bernoulli

Définition : Si on répète n fois de **manière identique et indépendante** une épreuve de Bernoulli de paramètre p, on obtient **un schéma de Bernoulli de paramètres n et p**

Remarques :

- *l'indépendance est assurée dans le cas de tirages successifs avec remise encore appelés tirages non exhaustifs.*
- *Lors d'un tirage sans remise de n éléments pris parmi N éléments, quand n est petit devant N, on peut assimiler ce tirage de n éléments successifs à n tirages successifs avec remise ce qui assure l'indépendance.*

On peut modéliser la répétition de ces épreuves de Bernoulli à l'aide d'un arbre pondéré.

Cas où n = 2	**Cas où n = 3**
	
$P(X=0)=P((\bar{S};\bar{S}))=q\times q=q^2$ $P(X=1)=P((S;\bar{S}))+P((\bar{S},S))=p\times q+q\times p=2pq$ $P(X=2)=P((S;S))=p\times p=p^2$	$P(X=0)=P((\bar{S};\bar{S};\bar{S}))=q^3$ $P(X=1)=P(S;\bar{S};\bar{S})+P(\bar{S};S;\bar{S})+P(\bar{S};\bar{S};S)=3pq^2$ $P(X=2)=P(S;S;\bar{S})+P(S;\bar{S};S)+P(\bar{S};S;S)=3p^2q$ $P(X=3)=P((S;S;S))=p^3$

Définition : Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel compris entre 0 et n.
Ce nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de Bernoulli est appelé **le coefficient binomial** et est noté $\binom{n}{k}$

Remarques :

- *le coefficient binomial est aussi le nombre de combinaisons de k éléments parmi n.*
- *il y a 1 seul chemin menant à 0 succès donc* $\binom{n}{0}=1$
- *De même, il y a un seul chemin menant à n succès donc* $\binom{n}{n}=1$
- *il y a n chemins menant à un seul succès donc* $\binom{n}{1}=n$

2. Loi binomiale

Définition : Soit X une variable aléatoire qui, à chaque issue d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, associe le nombre de succès au cours de ces n épreuves . La loi de probabilités de X est appelée **loi binomiale de paramètres n et p**. On la note **B(n,p)**.

Remarques :

- *les valeurs prises par X sont les entiers compris entre 0 et n.*
- *un chemin à k échecs comporte n-k succès.*

Exercice 3 :
On considère un jeu de 32 cartes. On tire deux cartes de ce jeu et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de cœurs obtenus.
Dans chacune des situations suivantes, dire si X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

1. On tire les deux cartes l'une après l'autre en ne remettant pas la première dans le jeu.
2. *On tire les deux cartes l'une après l'autre en remettant la première dans le jeu.*

Exercice 4 :
La ville de Las Vegas accueille environ 100 000 touristes chaque jour. On estime que 5 % des touristes ne viennent pas à LAS Vegas pour jouer au casino. On interroge au hasard 10 touristes dans la rue. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de touristes témoignant ne pas être venus dans cette ville pour jouer. Expliquer pourquoi on peut considérer que Y suit une loi binomiale.

Propriété : : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale B(n,p).
Pour tout entier *k* compris entre 0 et *n*, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$$

Preuve exigible au programme :

Soit X est une v.a suivant qui suit une loi B(n,p) alors pour connaître la probabilité d'avoir k succès, on compte toutes les issues de k succès et de (n-k) échecs. Dans l'arbre de probabilités modélisant un schéma de Bernoulli à n épreuves, les issues ont toutes la même probabilité $p^k \times q^{n-k}$ *de se réaliser. Or le nombre de chemins menant à k succès pour n répétitions d'un arbre de probabilité associé à un schéma de Bernoulli est égal au coefficient binomial* $\binom{n}{k}$.

En faisant la somme des probabilités de toutes les issues, on obtient : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

#

Exemple : on lance un dé équilibré 10 fois de suite et on s'intéresse au nombre X de fois où l'on obtient la face numérotée 3. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{6}$.

La v.a X égale au nombre de fois où l'on obtient la face numérotée 3 suit une loi binomiale $B(10;\frac{1}{6})$.

Exercice 5 :

On lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de « Pile » obtenus. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » dépasse 0,999.

Exercice 6 :

Pour un recrutement, les candidats doivent passer deux tests qui se soldent chacun par un succès ou un échec. L'événement A est « Réussir au premier test » et l'événement B est « réussir au second test ». On considère l'arbre pondéré ci-contre qui représente cette expérience aléatoire :

1. Donner les valeurs des probabilités suivantes $P(A), P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$
2. Calculer P(B)
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
4. Déterminer $P_B(A)$ et donner une interprétation de cette probabilité.
5. On ajoute un troisième test. On note C l'événement « réussir au troisième test », de probabilité 0,2. Si A et C sont indépendants que vaut $P(A \cap C)$.

Calculs de valeurs de probabilités $P(X=k)$ et $P(X\leqslant k)$ à la calculatrice

On va calculer $P(X=6)$ et $P(X\leqslant 3)$ *pour une loi binomiale* $B(10\,;0{,}6)$

Calculatrice Casio

Appuyer sur la touche MENU, choisir le menu **Exe-Mat** puis suivre les instructions ci-dessous.

1. Sélection du menu OPTN au clavier :

LIST | MAT/VCT | COMPLEX | CALC | STAT | ▷

2. En sélectionnant le menu **STAT**, on arrive au menu suivant :

$\hat{x}$ | $\hat{y}$ | DIST | StdDev | Var

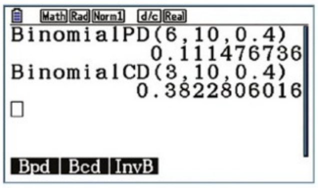
3. On sélectionne **DIST** ce qui affiche le menu :

NORM | t | CHI | F | BINOMIAL | ▷

4. On sélectionne **BINOMIAL**, ce qui affiche :

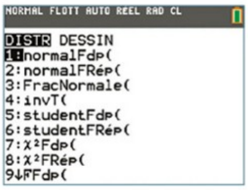
Bpd | Bcd | InvB

5. Pour calculer $P(X=6)$, on choisit **Bpd**.
On saisit alors : **BinomialPD(6,10,0.4)**.
Pour calculer $P(X\leqslant 3)$, on choisit **Bcd**.
On saisit alors : **BinomialCD(3,10,0.4)**.

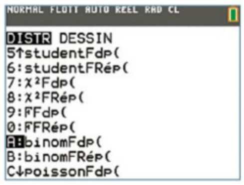


Calculatrice Texas

1. On sélectionne l'instruction **distrib** au clavier (touches 2nde puis var)

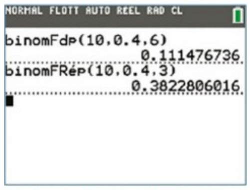


2. Pour calculer $P(X=6)$, avec la flèche de défilement, on recherche le menu **A:binomFdp(**, suivi de entrer .



3. On entre ensuite les valeurs **nbreEssais : 10**, **p : 0.4**, **valeur de x : 6**, puis on sélectionne **Coller**, et enfin on valide avec la touche entrer .

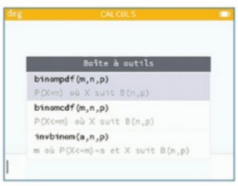
4. Pour calculer $P(X\leqslant 3)$, on sélectionne le menu **B:binomFRép(**, suivi de entrer .



5. On entre ensuite les valeurs **nbreEssais:10**, **p : 0.4**, **valeur de x : 3**, puis on sélectionne **Coller**, puis on valide avec entrer .

Calculatrice Numworks

1. Choisir le menu **Calculs.**
Pour calculer $P(X=6)$, saisir **binompdf (6,10,0.4)** suivi de EXE. L'instruction **binompdf** se trouve de la façon suivante :
Boîte à outils paste puis
Probabilités, ensuite **Loi binomiale** et enfin **binompdf (m,n,p).**



2. Pour calculer $P(X\leqslant 3)$, saisir **binomcdf (3,10,0.4)** suivi de EXE. L'instruction **binomcdf** se trouve de la façon suivante :
Boîte à outils paste
puis **Probabilités**, ensuite **Loi binomiale** et enfin **binomcdf (m,n,p).**

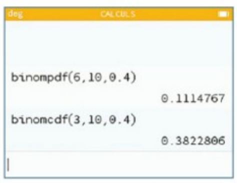


Tableau des valeurs $P(X=k)$ et $P(X\leqslant k)$ à la calculatrice

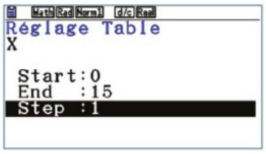
On va construire un tableau des valeurs $P(X\leqslant k)$ *pour une loi binomiale* $B(15;0,3)$

Calculatrice Casio

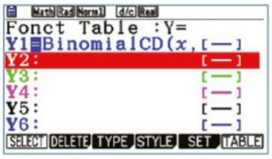
Appuyer sur la touche MENU, sélectionner le menu **Table**, puis suivre les instructions suivantes :

1 Dans **Y1**, saisir **BinomialCD(X,15,0.3)** Suivi de EXE. L'instruction **BinomialCD** se trouve de la façon suivante : **OPTN** puis ▷ F6 puis **STAT** F3 puis **DIST** F1 puis **BINOMINAL** F5 et enfin **Bcd** F2.

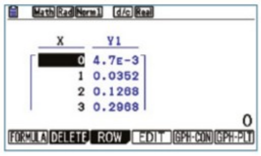
2 Choisir **SET** F5, puis entrer la première **Start** et la dernière valeur **End:** de k, ainsi que le pas, suivi de EXE.



3 Choisir **TABL**(touche F6).



4 Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche ↓ du pavé directionnel.



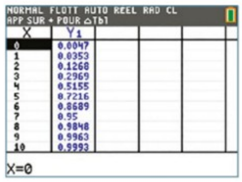
Remarque : pour un tableau des valeurs $P(X=k)$, on utilise l'instruction **BinomialPD(Bpd)**.

Calculatrice Texas

1 Sélectionner au clavier le menu f(x), saisir dans **Y1:BinomFRép(15,0.3,X)** suivi de entrer. L'instruction **BinomFRép** se trouve de la façon suivante : **distrib**(2nde puis var) puis avec la flèche de défilement, rechercher le menu **B:BinomFRép(**.

2 Choisir **déf table** (2nde puis fenêtre), et entrer la première valeur **DébutTbl** ainsi que le pas **ΔTbl**. On entre **Auto** pour **Indpnt** et **Auto** pour **Dépndte**. On passe d'une ligne à l'autre avec les flèches du curseur.

3 Sélectionner l'instruction **table** au clavier (2nde puis graphe). Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche ↓ du pavé directionnel.



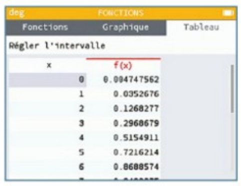
REMARQUE : pour un tableau de valeurs $P(X=k)$, on utilise l'instruction **BinomFdp**.

Calculatrices Numworks

1 Choisir le menu **FONCTIONS**. Saisir dans **f (x) = : binomcdf (x,15,0.3)** suivi de EXE. L'instruction **binomcdf** se trouve de la façon suivante : **Boîte à outils** puis **Probabilités**, puis **Loi binomiale** puis **binomcdf (m,n,p)**.

2 Sélectionner l'onglet **TABLEAU**, puis **Régler l'intervalle**. Entrer la première valeur **X début**, la dernière valeur **X fin** ainsi que le **Pas**, puis valider.

3 Le début du tableau de valeurs s'affiche. On obtient la suite du tableau en appuyant sur la touche ↓ du pavé directionnel.



REMARQUE : pour un tableau de valeurs $P(X=k)$, on utilise l'instruction **binomcdf (m,n,p)**.

Exercice 7 :

Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est 3 %.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 gélules, associe le nombre de gélules non commercialisables.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. A l'aide d'une calculatrice, déterminer le plus petit entier b tel que $P(X \in [0;b]) \geqslant 0{,}9$
3. Interprétez ce résultat.

Exercice 8 :

On s'intéresse à la proportion de faces marquées 1 obtenues quand on lance un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque série de 100 lancers, associe le nombre de 1 obtenus.

1. Quelle loi suit Y ?
2. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que $P(Y \leqslant a) > 0{,}025$ et $P(Y \leqslant b) \geqslant 0{,}975$
3. En déduire l'intervalle I tel que $P(Y \in I) \geqslant 0{,}95$. Interpréter ce résultat.