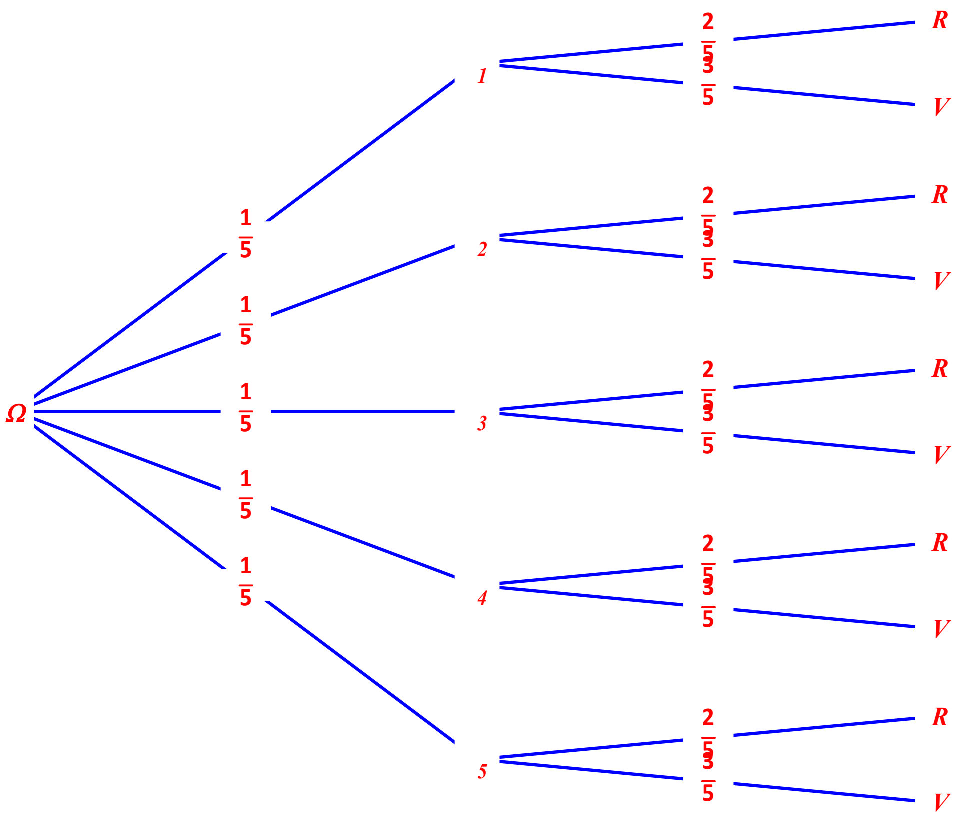
Exercice 1

On considère une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5. Deux boules sont rouges, les autres sont vertes. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer au hasard une boule, à noter son numéro, puis la remettre dans l'urne. On tire ensuite au hasard une seconde boule dont on note la couleur.

1. Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Établir la liste des issues possibles. Quelle est la probabilité de l'issue (1;R) ?

Correction

1. Oui, car le tirage s'effectue avec remise.
2.



3. Les issues sont : *(1;R)* , *(1;V)* , *(2;R)* , *(2;V)* , *(3;R)* , *(3;V)* , *(4;R)* , *(4;V)* , *(5;R)* , *(5;V)*

Exercice 2

Une expérience aléatoire consiste à lancer trois pièces : une pièce est truquée qui tombe deux fois plus souvent sur « Pile » que sur « Face » et deux pièces équilibrées. On modélise cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » lors du lancer de la pièce truquée ?
2. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
4. Déterminer la probabilité de l'événement E : « obtenir une seule fois Pile ».

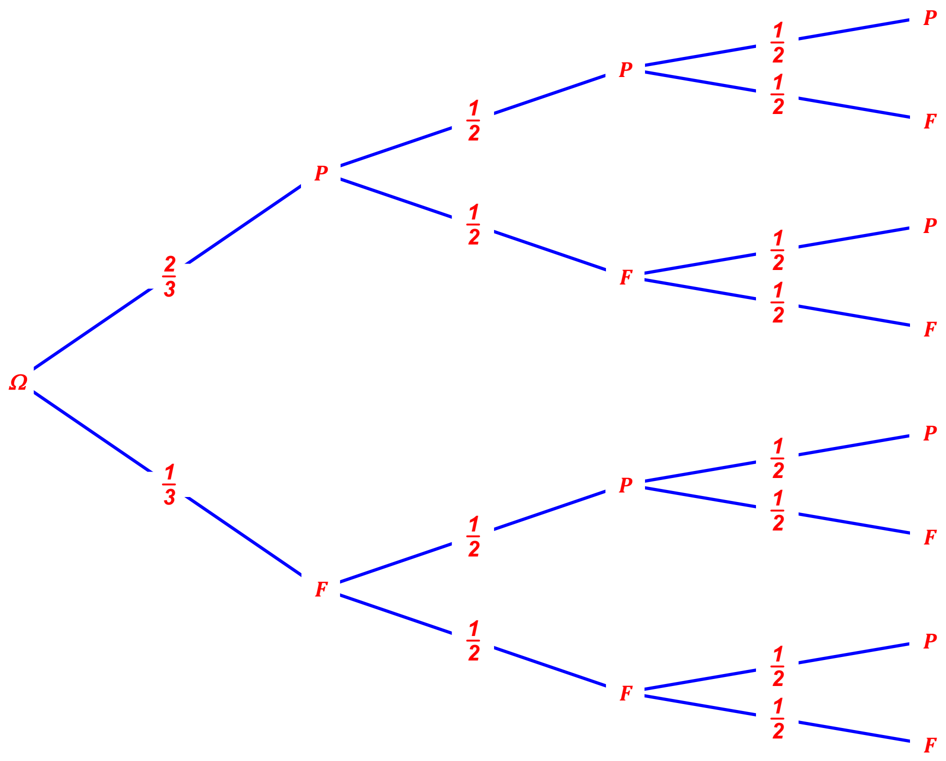
Correction

1. Notons q la probabilité d'obtenir « Face » alors la probabilité d'obtenir « Pile » vaut.

   On a $2q+q=1$ donc $q=\frac{1}{3}$ donc $p=\frac{2}{3}$.

2. Notons $P : Obtenir\ Pile$ et $F : Obtenir\ Face$. On a $\Omega=\{P;F\}^3$.

3.



4. $P(une\ seule\ fois\ Pile)=P(P,F,F)+P(F,P,F)+P(F,F,P)$

   $P(une\ seule\ fois\ Pile)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

   $P(une\ seule\ fois\ Pile)=\frac{2}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Exercice 3
On considère un jeu de 32 cartes. On tire deux cartes de ce jeu et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de cœurs obtenus.
Dans chacune des situations suivantes, dire si X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

1. On tire les deux cartes l'une après l'autre en ne remettant pas la première dans le jeu.
2. On tire les deux cartes l'une après l'autre en remettant la première dans le jeu.

Correction

1. Le deuxième tirage s'effectue sans remise donc X les tirages ne sont pas indépendants donc X ne suit pas une loi binomiale.
2. Le deuxième tirage s'effectue avec remise donc les tirages sont indépendants donc X suit une loi binomiale de paramètres n = 2 et p = 0,25.

Exercice 4
La ville de Las Vegas accueille environ 100 000 touristes chaque jour. On estime que 5 % des touristes ne viennent pas à LAS Vegas pour jouer au casino. On interroge au hasard 10 touristes dans la rue. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de touristes témoignant ne pas être venus dans cette ville pour jouer. Expliquer pourquoi on peut considérer que Y suit une loi binomiale.

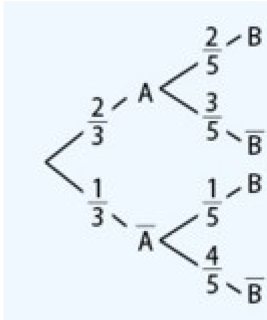
Correction

L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un touriste et à s'intéresser au fait qu'il vienne à Las Vegas pour ne pas jouer (succès) ou pas, est une épreuve de Bernoulli de paramètre p = 0,05.
On répète cette expérience aléatoire 10 fois de manière identique et indépendante (10 est négligeable devant 100 000 donc choisir 10 touristes parmi 100 000 peut être assimilé à des tirages avec remise). On obtient un schéma de Bernoulli de taille 10.
La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès c'est à dire le nombre de touristes venus à Las Vegas pour ne pas jouer suit donc une loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,05.

Exercice 5 On lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de « Pile » obtenus. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » dépasse 0,999.
Correction L'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce équilibrée et à s'intéresser au fait qu'on obtienne « Pile » (succès) ou pas, est une épreuve de Bernoulli de paramètre p = 0,5. On répète cette expérience aléatoire n fois de manière identique et indépendante. On obtient un schéma de Bernoulli de taille n. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès c'est à dire le nombre de « Piles » obtenus lors des n lancers suit donc une loi binomiale de paramètres n et p = 0,5. On a : $$P(X=k)=\binom{n}{k}0{,}5^k\,0{,}5^{n-k}$$ On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $P(X\geqslant 1)>0{,}999$. Or, $P(X\geqslant 1)>0{,}999 \Leftrightarrow 1-P(X=0)>0{,}999 \Leftrightarrow P(X=0)<0{,}001$. En dressant un tableau des valeurs de $P(X=k)=\binom{n}{k}0{,}5^k\,0{,}5^{n-k}$, on trouve $n=10$. *Remarque : l'inéquation* $P(X=0)<0{,}001$ *peut se résoudre à la main à l'aides du logarithme népérien.*

Exercice 6

Pour un recrutement, les candidats doivent passer deux tests qui se soldent chacun par un succès ou un échec. L'événement A est « Réussir au premier test » et l'événement B est « réussir au second test ».
On considère l'arbre pondéré ci-contre qui représente cette expérience aléatoire :



1. Donner les valeurs des probabilités suivantes
   $P(A), P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$
2. Calculer P(B)
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
4. Déterminer $P_B(A)$ et donner une interprétation de cette probabilité.
5. On ajoute un troisième test. On note C l'événement « réussir au troisième test », de probabilité 0,2. Si A et C sont indépendants que vaut $P(A \cap C)$.

Correction

1. $P(A)=\frac{2}{3}, P_A(B)=\frac{2}{5}$ et $P_{\bar{A}}(B)=\frac{1}{5}$

2. Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω .
   D'après la formule des probabilités totales, on a :
   $P(B)=P(A)\times P_A(B)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

3. $P(A\cap B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ et $P(A)\times P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}\neq\frac{4}{15}$ donc A et B ne sont pas indépendants.

4. $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}\times\frac{3}{1}=\frac{2}{3}$ représente la probabilité qu'un étudiant ait réussi au premier test sachant qu'il a réussi au deuxième test .

5. Si A et C sont indépendants alors $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

Exercice 7

Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est 3 %.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 gélules, associe le nombre de gélules non commercialisables.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. A l'aide d'une calculatrice, déterminer le plus petit entier b tel que $P(X\in[0;b])\geqslant 0{,}9$
3. Interprétez ce résultat.

Correction

1. L'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une gélule sur une chaîne de production pharmaceutique et à s'intéresser au fait qu'elle soit non commercialisable (succès) ou pas, est une épreuve de Bernoulli de paramètre p = 0,03.
   On répète cette expérience aléatoire 200 fois de manière identique et indépendante.
   (200 est négligeable devant le nombre de gélules de la chaîne de production donc choisir 200 gélules peut être assimilé à des tirages avec remise). On obtient un schéma de Bernoulli de taille 200.
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de gélules non commercialisables suit donc une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,03. Pour tout entier k compris entre 0 et 200,
   $$P(X=k)=\binom{200}{k}0{,}03^k\,0{,}97^{200-k}$$
2. Le plus petit entier b tel que $P(X\in[0;b])\geqslant 0{,}9$ est $b=9$.
3. Cela signifie que, parmi chaque échantillon de 200 gélules, la probabilité de trouver au plus 9 gélules défectueuses est supérieure ou égale à 90%.

Exercice 8

On s'intéresse à la proportion de faces marquées 1 obtenues quand on lance un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque série de 100 lancers, associe le nombre de 1 obtenus.

1. Quelle loi suit Y ?
2. Déterminer les plus petits entiers a et b tels que $P(Y \leqslant a) > 0{,}025$ et $P(Y \leqslant b) \geqslant 0{,}975$
3. En déduire l'intervalle I tel que $P(Y \in I) \geqslant 0{,}95$. Interpréter ce résultat.

Correction

1. L'expérience aléatoire consistant à lancer un dé tétraédrique équilibré et à s'intéresser au fait d'obtenir le nombre 1 (succès) ou pas, est une épreuve de Bernoulli de paramètre p = 0,25.
   On répète cette expérience aléatoire 100 fois de manière identique et indépendante.
   On obtient un schéma de Bernoulli de taille 100.
   La variable aléatoire Y qui compte le nombre de 1 obtenus lors de ces 100 lancers suit donc une loi binomiale de paramètres n = 100 et p = 0,25.

2. A l'aide de la calculatrice, le plus petit entier a tel que $P(Y \leqslant a) > 0{,}025$ est $a = 17$.
   A l'aide de la calculatrice, le plus petit entier b tel que $P(Y \leqslant b) \geqslant 0{,}975$ est $b = 34$.

3. On a $P(17 \leqslant Y \leqslant 34) = P(Y \leqslant 34) - P(Y < 17) = P(Y \leqslant 34) - P(Y \leqslant 16) \geqslant 0{,}975 - P(Y \leqslant 16)$
   Or 17 est le plus petit entier tel que $P(Y \leqslant a) > 0{,}025$ donc $P(Y \leqslant 16) \leqslant 0{,}025$ donc $-P(Y \leqslant 16) \geqslant -0{,}025$. On déduit que :
   $P(17 \leqslant Y \leqslant 34) \geqslant 0{,}975 - P(Y \leqslant 16) \geqslant 0{,}975 - 0{,}025$ donc $P(17 \leqslant Y \leqslant 34) \geqslant 0{,}95$.

   Conclusion I = [17;34] ce qui signifie que la probabilité d'obtenir entre 17 et 34 fois la face 1 au cours de 100 lancers d'un dé tétraédrique équilibré est supérieure ou égale à 95 %.