Exercice 52 page 142

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

1. A partir de quel rang a-t-on $v_n \in]1{,}99 ; 2{,}01[$?
2. En utilisant la définition, montrer que (v_n) converge vers 2.

Correction

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

   On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N, 1{,}99 < v_n < 2{,}01$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1{,}99 < v_n < 2{,}01 \Leftrightarrow 1{,}99 < 2 + \frac{1}{n^2} < 2{,}01 \Leftrightarrow -0{,}01 < \frac{1}{n^2} < 0{,}01 \Leftrightarrow n^2 > 100 \Leftrightarrow n \geqslant 11$.

   Conclusion : A partir du rang $N = 11$, tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle ouvert]1,99 ; 2,01[.

2. Soit $A \in \mathbb{R}, A > 0$. On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N, -A < v_n - 2 < A$.

   Or $-A < v_n - 2 < A \Leftrightarrow -A < \frac{1}{n^2} < A \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{A} \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{A}}$.

   Conclusion : A partir du rang $N = [\sqrt{\frac{1}{A}}] + 1$, tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle ouvert]2-A ; 2+A[pour tout réel A>0 donc (v_n) converge vers 2.

Exercice 54 page 142

Le propriétaire d'une parcelle boisée comptant 10 000 arbres en 2020 gère son exploitation en suivant le modèle suivant : pour tout entier naturel n , u_n est le nombre d'arbres en $2020+n$ et $u_{n+1}=0{,}8u_n+600$. On admet que (u_n) est décroissante.

Il souhaite conserver au moins 4000 arbres sur sa parcelle.

Parmi les algorithmes suivants, un seul est tel qu'après exécution, la variable N contient le nombre d'années nécessaires pour que le nombre d'arbres devienne inférieur ou égal à 4000.

Indiquer lequel en justifiant.

Algorithme a	Algorithme b	Algorithme c
U ← 10000	U ← 10000	U ← 10000
N ← 0	N ← 0	N ← 0
Tant que U ≤ 4000	Tant que U > 4000	Tant que U > 4000
N ← N+1	N ← N+1	N ← N+1
U ← 0,8 x U + 600	U ← 0,8 x U + 600	U ← 0,8 x N + 600
Fin Tant que	Fin Tant que	Fin Tant que

Correction

Réponse : b

En effet, déterminer le nombre d'années à partir duquel le nombre d'arbres devient inférieur ou égal à 4000 revient à déterminer le seuil N de la suite (u_n) pour lequel $u_N<4000$.

Pour cela, il suffit de calculer les termes successifs de la suite jusqu'à obtenir le premier indice N tel que u_N . On déduit que seul l'algorithme b. convient.

Exercice 61 page 143

Déterminer rigoureusement la limite éventuelle des suites suivantes :

$u_n=n^2-2n$ $\qquad u_n=-3n^2+6n+7$ $\qquad u_n=n^3-3n^2+2n-5$

$u_n=\dfrac{3n+5}{n^2-4},n>2$ $\qquad u_n=\dfrac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n},n>0$ $\qquad u_n=\dfrac{5+n+n^2}{n},n>0$

Correction

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-2n$ est une FI du type $+\infty-\infty$.

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-2n=\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(1-\dfrac{2}{n})=+\infty$ comme produit de limites avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2+6n+7$ est une FI du type $-\infty+\infty$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2+6n+7 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-3+\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}\right) = -\infty$ comme produit de limites avec

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3-3n^2+2n-5$ est une FI du type $+\infty-\infty$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-3n^2+2n-5 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right) = +\infty$ comme produit de limites avec

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+5}{n^2-4}$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+5}{n^2-4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{4}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1-\frac{4}{n^2}\right)} = 0$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\frac{5}{n}\right) = 3$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{4}{n^2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{4}{n^2}\right) = +\infty$

On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1-\frac{4}{n^2}\right)} = 0$ comme quotient de limites donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n}$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n}\right)}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = -2$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\frac{5}{n}\right) = 3$

On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \frac{-2}{3}$ comme quotient de limites donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{2}{3}$.

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+n+n^2}{n}$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+n+n^2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2(\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n}+1)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n}+1)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}+\frac{1}{n}+1=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n}+1)=+\infty$

On déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Exercice 62 page 143

Déterminer rigoureusement la limite éventuelle des suites suivantes :

$u_n=-n^2+\sqrt{n}$ $\quad u_n=\frac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n}, n>0$ $\quad u_n=\frac{n^2}{\sqrt{n}}, n>0$ $\quad u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^3}, n>0$

Indication : dans cet exercice, nous aurons besoin des égalités suivantes :

$(1)\, n=\sqrt{n}\times\sqrt{n}$ $\quad (2)\, n^2=\sqrt{n}\times\sqrt{n}\times n$ $\quad (3)\, n^3=\sqrt{n}\times\sqrt{n}\times n^2$

Correction

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2+\sqrt{n}$ est une FI du type $-\infty+\infty$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2+\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2(-1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2(-1+\frac{1}{\sqrt{n}\times n})$ d'après l'indication (2)

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1+\frac{1}{\sqrt{n}\times n})=-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(-1+\frac{1}{\sqrt{n}\times n})=-\infty$ comme produit de limites d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n}$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6\sqrt{n}-n}{\sqrt{n}+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(\frac{6}{\sqrt{n}}-1)}{n(\frac{1}{\sqrt{n}}+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{6}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}$ d'après l'indication (1)

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{6}{\sqrt{n}}-1)=-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}}+1)=1$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{6}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1}=-1$ comme quotient de limites d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-1$.

3.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n}}$ est une FI du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}$ d'après le rappel (2) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ comme produit de limites.

4.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$ est une FI du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2\times\sqrt{n}}$ d'après l'indication (3) . Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\times\sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 63 page 143

Déterminer rigoureusement la limite éventuelle des suites suivantes :

$u_n = 5n^3 - 3n^2 + 2\sqrt{n}$ $\qquad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5), n>0$ $\qquad u_n = \dfrac{5n^3-3n^2+2\sqrt{n}}{n}, n>0$

Correction

1.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5n^3-3n^2+2\sqrt{n}$ est une FI du type $+\infty-\infty$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n^3-3n^2+2\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2\times\sqrt{n}}\right)$ d'après le rappel (3) .

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2\times\sqrt{n}}\right) = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5)$ est une FI du type $0\times\infty$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5) = \lim\limits_{n\to+\infty} -3\sqrt{n}+\dfrac{5}{\sqrt{n}}$ en développant et en utilisant le rappel (1) .

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\sqrt{n} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ comme somme de limites.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3-3n^2+2\sqrt{n}}{n}$ est une FI du type $0\times\infty$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3-3n^2+2\sqrt{n}}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 5n^2-3n+\dfrac{2}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2\times\sqrt{n}}\right)$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2\times\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2\times\sqrt{n}}\right) = 5$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(5-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2\times\sqrt{n}}\right) = +\infty$ par produit de limites d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 69 page 143

Choisir la ou les bonnes réponses.

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ alors :
   (a) (u_n) converge vers 0.
   (b) Il existe un rang à partir duquel tous les termes sont positifs.
   (c) On ne peut pas déterminer si la suite est convergente ou divergente.

2. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2-3n$ alors :
   (a) $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
   (b) La suite (u_n) converge.
   (c)l Il existe un rang à partir duquel tous les termes sont négatifs.

Correction

1. réponse c
2. réponse a & c

Exercice 79 page 144

Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = -\frac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \; pour \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$.
2. Étudier la convergence de la suite (v_n) .

Correction

1. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n): v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

<u>Initialisation</u>

$v_0 = -\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3} - (-2)^0 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

<u>Hérédité</u>

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

On a $v_{n+1} = -2v_n + 1 = -2\left(\frac{1}{3} - (-2)^n\right) + 1$ d'après (HR)

donc $v_{n+1} = -\frac{2}{3} - (-2)^{n+1} + 1 = \frac{1}{3} - (-2)^{n+1}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n$. Or $|(-2)| = 2 > 1$ donc la suite géométrique $((-2)^n)$ diverge donc (v_n) diverge.

Exercice 80 page 144

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \; pour \, n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
2. On introduit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

   (a) Montrer que (t_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

   (b) Expliciter t_n en fonction de n .
3. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n .
4. En déduire la convergence de (u_n) et donner sa limite.

Correction

1. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n \geqslant 0$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation

$u_0 = 1 \geqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

Au rang suivant $n+1$, on a $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$ d'après (HR)

Or, d'après (HR), $u_n \geqslant 0$ donc $3u_n + 1 > 0$ et $2u_n + 4 > 0$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

2. Soit (t_n) la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, t_n=\dfrac{2u_n-1}{u_n+1}$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$t_{n+1}=\frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\frac{2\times\frac{3u_n+1}{2u_n+4}-1}{\frac{3u_n+1}{2u_n+4}+1}=\frac{\frac{6u_n+2-2u_n-4}{2u_n+4}}{\frac{3u_n+1+2u_n+4}{2u_n+4}}=\frac{4u_n-2}{5u_n+5}=\frac{2(2u_n-1)}{5(u_n+1)}=\frac{2}{5}t_n$$

donc (t_n) est géométrique de raison $q=\dfrac{2}{5}$ et de 1[er] terme $t_0=\dfrac{2\times1-1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

(b) On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, t_n=t_0\times q^n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$t_n=\frac{2u_n-1}{u_n+1}\Leftrightarrow t_nu_n+t_n=2u_n-1\Leftrightarrow t_nu_n-2u_n=-t_n-1\Leftrightarrow u_n(t_n-2)=-t_n-1\Leftrightarrow u_n=\frac{-t_n-1}{t_n-2}$$

On déduit que $u_n=\dfrac{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n-2}$.

4. $0<\dfrac{2}{5}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$ donc (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 92 page 145

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1{,}8 \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{3-u_n}\ pour\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est bornée par 1 et 2.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante.
3. Conclure quant à la convergence de (u_n) .
4. Conjecturer avec la calculatrice la limite de (u_n) .

Correction

1. Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n): 1\leqslant u_n\leqslant 2$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

<u>Initialisation</u>

$u_0=1{,}8$ donc $1\leqslant u_0\leqslant2$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

Or, d'après (HR) , $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ donc :

$$-2 \leqslant -u_n \leqslant -1 \text{ donc } 1 \leqslant 3-u_n \leqslant 2 \text{ donc } \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{3-u_n} \leqslant 1 \text{ donc } 1 \leqslant \frac{2}{3-u_n} \leqslant 2 \text{ donc } 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(n) : u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation

$u_0 = 1{,}8$ et $u_1 = \dfrac{2}{3-1{,}8} = \dfrac{2}{1{,}2} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}66$ donc $u_1 - u_0 \leqslant 0$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

On a :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2}{3-u_{n+1}} - \frac{2}{3-u_n} = \frac{6-2u_n-6+2u_{n+1}}{(3-u_{n+1})(3-u_n)} = \frac{2(u_{n+1}-u_n)}{(3-u_{n+1})(3-u_n)} \ .$$

Or, d'après le 1., $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$ donc $(3-u_{n+1}) < 0$ et $(3-u_n) < 0$ donc $(3-u_{n+1})(3-u_n) > 0$ et d'après (HR) , $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} \leqslant 0$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée donc convergente.

4. A l'aide de la calculatrice, il semble que (u_n) converge vers 1.

Remarque : on aurait pu traiter les question s1, et 2. en étudiant la fonction f *définie sur* $[\,0;3[$ *par* $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ *et en observant que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 94 page 145

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+2u_n} \text{ pour } n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

1. On considère la fonction f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+2x}$.
   Dresser son tableau de variations sur $[0;+\infty[$.
2. (a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, 0<u_n<1$.
   (b) Étudier le sens de variations de (u_n).
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{3^n}{3^n+1}$ et en déduire la limite de (u_n).

Correction

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+2x}$.
   f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme fonction homographique (quotient de deux fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ensemble de définition).

   $\forall x\geqslant 0, f'(x)=\dfrac{3(1+2x)-2\times 3x}{(1+2x)^2}=\dfrac{3+6x-6x}{(1+2x)^2}=\dfrac{3}{(1+2x)^2}>0$ donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $\forall x\geqslant 0, f(x)>f(0)=0$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	0 $\nearrow$

2. (a) Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n): 0<u_n<1$.
   Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   Initialisation
   $u_0=\dfrac{1}{2}$ donc $0<u_0<1$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

   Hérédité
   Hypothèse de récurrence
   On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).
   D'après (HR), on $0<u_n<1$.
   Or $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc
   $f(0)<f(u_n)<f(1)$.

Or $f(0)=0$ et $f(1)=\frac{3}{3}=1$ donc $0<u_{n+1}<1$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n):u_{n+1}>u_n$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation

$u_0=\frac{1}{2}$ et $u_1=\frac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$ donc $u_1>u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

D'après (HR), on a $u_{n+1}>u_n$.

Or $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc $f(u_{n+1})>f(u_n)$ donc $u_{n+2}>u_{n+1}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}>u_n$ donc (u_n) est strictement croissante.

3. (u_n) est croissante (d'après le 2.b.) et majorée (d'après le 2.a.) donc convergente.

4. Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n):u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation

$u_0=\frac{1}{2}$ et $\frac{3^0}{3^0+1}=\frac{1}{2}$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}=\frac{3\times\frac{3^n}{3^n+1}}{1+2\times\frac{3^n}{3^n+1}}=\frac{\frac{3^{n+1}}{3^n+1}}{\frac{3^n+1+2\times3^n}{3^n+1}}=\frac{3^{n+1}}{3\times3^n+1}=\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+1}$$

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}=\frac{3\times\frac{3^n}{3^n+1}}{1+2\times\frac{3^n}{3^n+1}}$$ d'après (HR) d'où

$$u_{n+1}=\frac{\frac{3^{n+1}}{3^n+1}}{\frac{3^n+1+2\times3^n}{3^n+1}}=\frac{3^{n+1}}{3\times3^n+1}=\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}+1}$$ donc $P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}=\frac{3^n}{3^n(1+\frac{1}{3^n})}=\frac{1}{1+\frac{1}{3^n}}$.

Or $3>1$ donc $\lim_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

Exercice 96 page 146

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température de 80°C dans un milieu dont la température est constante égale à 10°C.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant un modèle d'évolution discret utilisant une suite.
Pour tout entier naturel n , on note T_n la température du café, en degré Celsius, à l'instant n , en minutes. On a ainsi $T_0=80$. On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives n et $n+1$ par $T_{n+1}-T_n=-0{,}2(T_n-10)$.

1. Utiliser le contexte physique pour conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) .
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, T_{n+1}=0{,}8T_n+2$.
3. (a) Programmer une fonction Python retournant la liste des 10 premiers termes de la suite (T_n) .
   (b) Cette liste est-elle cohérente avec la conjecture émise au 1. ?
4. On pose, $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=T_n-10$.
   (a) Montrer que (u_n) est géométrique et préciser sa raison et son 1[er] terme u_0 .
   (b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}, T_n=70\times 0{,}8^n+10$.
   (c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Interpr2ter ce résultat.

Correction

1. La température du café étant supérieure à la température ambiante et constante de la pièce, il semble que la suite (T_n) soit décroissante.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $T_{n+1}-T_n=-02(T_n-10)$ donc $T_{n+1}=T_n-0{,}2T_n+2=0{,}8T_n+2$

3. (a)

```python
def newton():
    L=[80]
    T=80
    n=0
    for i in range(9):
        T=0.8*T+2
        L.append(T)
    return(L)
```

   (b) La liste semble cohérente avec l'hypothèse (T_n) décroissante.

4. $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=T_n-10$.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $u_{n+1}=T_{n+1}-10=0{,}8T_n+2-10=0{,}8T_n-8=0{,}8(T_n-10)=0{,}8u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison $q=0{,}8$ et de 1[er] terme $u_0=T_0-10=70$.
   (b) On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0\times q^n=70\times 0{,}8^n$ donc $T_n=70\times 0{,}8^n+10$.
   (c) $0<0{,}8<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n=10$ donc la température du café va décroître et se rapprocher de la température ambiante constante de la pièce c'est à dire 10°C après un certain nombre de minutes.

Exercice 98 page 146

Un groupe d'économistes étudie le taux de disponibilité des ressources alimentaires nécessaires pour le développement de la population d'un pays émergent.
Ce taux dépend notamment du nombre d'habitants, de la quantité de nourriture, de l'espace agricole disponible et de l'état sanitaire de la population. Une étude menée en 2019 a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9; cela signifie que 90% des ressources sont disponibles. Pour tout entier naturel n , on appelle R_n le taux de disponibilité pour l'année $2019+n$. On choisit le modèle de Verhulst pour définir la suite (R_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}, R_{n+1}=R_n-0,1R_n^2$.

1. Une partie des économistes estiment qu'en 2024, la taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,6. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Justifier à l'aide de la calculatrice.
2. On définit la fonction f sur [0;1] par $f(x)=x=0,1x^2$.
   Ainsi, la suite (R_n) vérifie $\forall n\in\mathbb{N}, R_{n+1}=f(R_n)$.
   (a) Étudier les variations de f sur [0;1].
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant R_{n+1}\leqslant R_n\leqslant 1$.
   (c) La suite (R_n) est-elle convergente ?
3. Le groupe d'économistes affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,6 au cours des 20 premières années qui suivent l'année 2024 et qu'il est capable de déterminer en quelle année ce seuil sera atteint pour la première fois.
   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ?
   Justifier à l'aide d'un programme ou d'un tableur.

Correction

Modèle de Verhulst : $R_0=0,9$ et $\forall n\in\mathbb{N}, R_{n+1}=R_n-0,1R_n^2$.

1. A l'aide de la calculatrice, on construit le tableau de valeurs suivant :

n	u(n)
0	0.9
1	0.819
2	0.7519
3	0.6954
4	0.647
5	0.6052
6	0.5685

En effet, pour $n=5$ on a $R_5\approx 0,6$ ce qui signifie bien qu'en 2024, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,6.*

2. Soit f la fonction définie sur [0;1] par $f(x)=x-0,1x^2$.
   Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}, f(R_n)=R_n-0,1R_n^2=R_{n+1}$.

   (a) f est dérivable sur [0;1] comme fonction polynôme et
   $\forall 0\leqslant x\leqslant 1, f'(x)=1-0,2x$

   $$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-0,2x=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{0,2}=5$$

   $$f'(x)>0\Leftrightarrow 1-0,2x>0\Leftrightarrow x<\frac{1}{0,2}\Leftrightarrow x<5$$

   $$f'(x)<0\Leftrightarrow 1-0,2x<0\Leftrightarrow x>\frac{1}{0,2}\Leftrightarrow x>5$$

On déduit que $f'>0$ sur [0;1] et donc f est strictement croissante sur [0;1].

(b) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant R_n\leqslant R_{n+1}\leqslant 1$.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n): 0\leqslant R_n\leqslant R_{n+1}\leqslant 1$.
Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

<u>Initialisation</u>
$R_0=0{,}9$ et $R_1\approx 0{,}819$ donc $0\leqslant R_1\leqslant R_0\leqslant 1$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

<u>Hérédité</u>
Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).
D'après (HR), on a $0\leqslant R_n\leqslant R_{n+1}\leqslant 1$.
Or $R_{n+1}=f(R_n)$ avec f strictement croissante sur [0 ;1] donc $f(0)\leqslant f(R_{n+1})\leqslant f(R_n)\leqslant f(1)$ donc $0\leqslant R_{n+2}\leqslant R_{n+1}\leqslant 0{,}9<1$ donc $P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

(c) On déduit que (R_n) est décroissante et minorée donc convergente.

3. A l'aide d'un tableur ou de la calculatrice ou d'un programme Python, on obtient :

	A	B	C	D
1	Année	n	R_n	Seuil
2	2019	0	0,9	seuil non atteint
3	2020	1	0,819	seuil non atteint
4	2021	2	0,751924	seuil non atteint
5	2022	3	0,695385	seuil non atteint
6	2023	4	0,647029	seuil non atteint
7	2024	5	0,605164	seuil non atteint
8	2025	6	0,568542	seuil dépassé
9	2026	7	0,536218	seuil dépassé
10	2027	8	0,507465	seuil dépassé
11	2028	9	0,481713	seuil dépassé
12	2029	10	0,458508	seuil dépassé
13	2030	11	0,437485	seuil dépassé
14	2031	12	0,418346	seuil dépassé
15	2032	13	0,400845	seuil dépassé
16	2033	14	0,384777	seuil dépassé
17	2034	15	0,369972	seuil dépassé
18	2035	16	0,356284	seuil dépassé
19	2036	17	0,34359	seuil dépassé
20	2037	18	0,331784	seuil dépassé
21	2038	19	0,320776	seuil dépassé
22	2039	20	0,310487	seuil dépassé
23	2040	21	0,300846	seuil dépassé
24	2041	22	0,291796	seuil dépassé
25	2042	23	0,283281	seuil dépassé
26	2043	24	0,275256	seuil dépassé
27	2044	25	0,26768	seuil dépassé

```python
def verhulst():
    L=[0.9]
    R=0.9
    n=0
    for i in range(25):
        R=R-0.1*R**2
        L.append(R)
    return(L)
```

On observe que le taux de disponibilité devient inférieur à 0,6 en 2025.

Exercice 99 page 147

Un urbaniste souhaite étudier l »évolution de la population d'un quartier en expansion. Cette population est estimée à 12000 individus en 2020. Les contraintes en termes d'équipements publics (écoles, services publics, etc..) font que la population ne peut dépasser 60000 individus.

Partie A : modèle n°1

L'urbaniste commence par supposer que la population va augmenter de 5% par an. L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, en milliers, en $2020+n$.

1. Déterminer v_0 et v_1 .
2. Déterminer la nature de (v_n) .
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n .
4. Ce modèle répond-il aux contraintes en termes d'équipements ? Sinon, proposer un algorithme permettant de déterminer à parir de quelle année ce ne sera plus le cas.

Partie B : modèle n°2

L'urbaniste modélise maintenant l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0=12$ et $u_{n+1}=-\frac{1,1}{605}u_n^2+1,1u_n, pour\, n\in\mathbb{N}$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\frac{1,1}{605}x^2+1,1x$.

   (a) Justifier que g est croissante sur [0;60].
   (b) résoudre $g(x)=x$ dans $\mathbb{R}$.
2. On remarque que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=g(u_n)$.
   (a) Calculer l'arrondi à 0,001 de u_1 puis interpréter le résultat.
   (b) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant 55$.
   (c) Démontrer que (u_n) est croissante.
   (d) En déduire la convergence de (u_n) .
   (e) On admet que la limite l de (u_n) vérifie $g(l)=l$.
   En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. L'urbaniste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant :

```
U ← 12
N ← …
Tant que …
        U ← …
        N ← …
Fin Tant que
```

   Compléter cet algorithme afin que la variable N con tienne après son exécution le plus petit entier r tel que $u_r\geqslant 50$.

Correction

Partie A

1. $v_0=12$ et $v_1=12\times1{,}05=12{,}6$.

2. Selon le modèle choisi, la population augmente de 5 % chaque année donc la population est multipliée par 1,05 chaque année donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=1{,}05$ et de 1[er] terme $v_0=12$.

3. On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=v_0\times q^n=12\times1{,}05^n$.

4. $1{,}05>1$ et $v_0=12>0$ donc (v_n) est strictement croissante et va diverger vers $+\infty$ donc dépasser 60 à partir d'un certain rang N .
   A l'aide de la calculatrice, on détermine le seuil $N=33$ c'est à dire à partir de 2053 la population dépassera les 60000 habitants.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=12$ et $\forall n\in\mathbb{N} u_{n+1}=-\dfrac{1{,}1}{605}u_n^2+1{,}1u_n$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\dfrac{1{,}1}{605}x^2+1{,}1x$.

   (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.
   De plus, $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=-\dfrac{2{,}2}{605}x+1{,}1$.

   $g'(x)\geqslant0\Leftrightarrow-\dfrac{2{,}2}{605}x\geqslant-1{,}1\Leftrightarrow x\leqslant302{,}5$ donc g est croissante sur $[0;60]$.

   (b)
   $g(x)=x\Leftrightarrow-\dfrac{1{,}1}{605}x^2+1{,}1x=x\Leftrightarrow-\dfrac{1{,}1}{605}x^2+0{,}1x=0\Leftrightarrow-1{,}1x^2+60{,}5x=0\Leftrightarrow-11x^2+605x=$

   $g(x)=x\Leftrightarrow x(-11x+605)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=\dfrac{605}{11}=55$

   Conclusion : l'équation $g(x)=x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: 0 et 55 .

2. On observe que $\forall n\in\mathbb{N}, g(u_n)=u_{n+1}$.
   (a) $u_1=g(u_0)=g(12)\approx12{,}938$ à 10^{-3} *près* ce qui signifie que la population estimée en 2021 par ce modèle est d'environ 12938 habitants.

   (b) Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant55$.
   Posons $\forall n\in\mathbb{N}, P(n): 0\leqslant u_n\leqslant55$.
   Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

   <u>Initialisation</u>
   $u_0=12$ donc $0\leqslant u_0\leqslant55$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

D'après (HR), on a $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

Or $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g croissante sur [0;55] donc $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$.

Or $g(0)=0$ et $g(55)=55$ donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

(c) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : u_n \leqslant u_{n+1}$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation

$u_0 = 12$ et $u_1 \approx 12{,}938$ donc $u_0 \leqslant u_1$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

D'après (HR), on a $u_n \leqslant u_{n+1}$ .Or $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g croissante sur [0;55] donc $g(u_n) \leqslant g(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

On déduit que (u_n) est croissante.

(d) (u_n) est croissante et majorée donc convergente.

(e) On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $g(l)=l$ donc d'après le 1.b. on déduit que $l=0$ ou $l=55$. Comme (u_n) est croissante non constante égale à 0, on déduit que $l=55$.

3. L'algorithme suivant permet de déterminer le seuil à partir duquel la population dépassera les 50 000 habitants

```
U ← 12
N ← 0
Tant que U ≤ 50
    U ← −(1,1/605)U² + 1,1U
    N ← N+1
Fin tant que
```