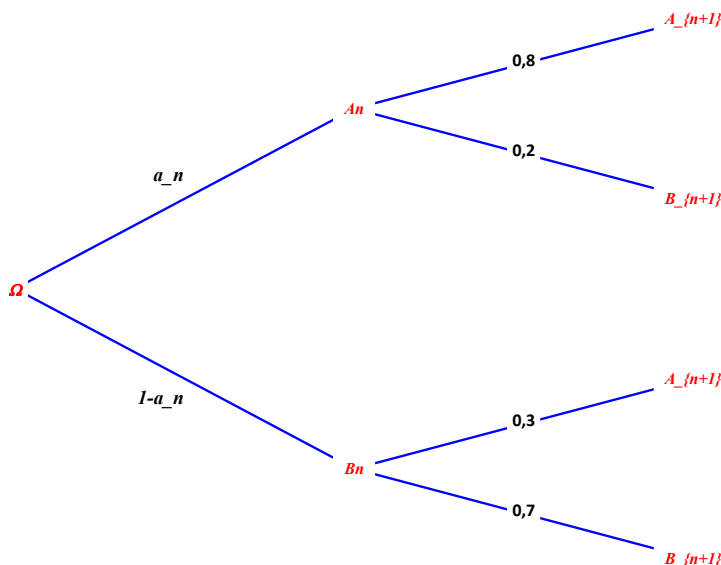


Sujet A page 161

1. (a)



(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les événements A_n et B_n forment une partition de Ω .

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1})$$

$$a_{n+1} = a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3$$

$$a_{n+1} = 0,8 a_n + 0,3 - 0,3 a_n$$

$$a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3$$

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n - 0,6$ pour tout entier $n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. On a :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5 a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5 a_n - 0,3$$

$$u_{n+1} = 0,5 \left(a_n - \frac{0,3}{0,5} \right) = 0,5 (a_n - 0,6) = 0,5 u_n$$

donc (u_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de 1^{er} terme $u_1 = a - 0,6$.

3. On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n = u_1 \times q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$

Or, $a_n = u_n + 0,6$ donc $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

4. On a $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$ qui ne dépend pas de a .

Sujet B page 161

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} \end{array} \right.$$

1. $u_0 = 3$

Calcul de u_1

$$u_0 + u_1 = u_0 \times u_1 \text{ donc } 3 + u_1 = 3 \times u_1 \text{ donc } 3 = 2u_1 \text{ donc } u_1 = \frac{3}{2} .$$

Calcul de u_2

$$u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2 \text{ donc } 3 + \frac{3}{2} + u_2 = 3 \times \frac{3}{2} \times u_2 \text{ donc } \frac{9}{2} + u_2 = \frac{9}{2} u_2 \text{ donc}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{9}{2} u_2 - u_2 \text{ donc } \frac{9}{2} = \frac{7}{2} u_2 \text{ donc } u_2 = \frac{9}{7} .$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$ et $s_1 = u_0$

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ et $u_0 > 1$ donc $s_n = u_0 + (u_1 + \dots + u_{n-1}) > 1$ donc $s_n > 1$

(b) Soit $n \geq 1$.

On a $s_{n+1} = s_n + u_n = s_n \times u_n$ donc $s_n = (s_n - 1) \times u_n$ donc $\frac{s_n}{s_n - 1} = u_n$

avec $\forall n \geq 1, s_n > 1$ donc $s_n - 1 \neq 0$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, s_n > 1$ et $0 < s_n - 1 < s_n$ donc $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} > 1$

3. (a)

```
main.py
1 def algo(n,u):
2     u=3
3     s=u
4     for i in range(1,n+1):
5         u=s/(s-1)
6         s=s+u
7     return(u)
```

```
Python 3.8.2 (default, Feb 26 2020, 02:56:10)
algo(2,3)
1.2857142857142858
```

On vérifie que $u_2 = \frac{9}{7} \approx 1,285714286$ à la calculatrice.

(b) (u_n) semble converger vers 1.

4. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$ donc $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} > 1 \times n$ donc $s_n > n$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ par comparaison de limites.

On déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{s_n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{s_n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{s_n \left(1 + \frac{1}{s_n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{s_n}\right)} = 1$$

Sujet C page 161

1. L'affirmation 1 est fausse car la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes et pourtant elle est ni croissante ni décroissante.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = n^2 - 42n + 4 = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 42x + 4$
 f est une fonction polynôme du 2nd degré avec $a = 1 > 0$ (coefficient des x^2) donc f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{42}{2} = 21$ donc la suite (p_n) est ni croissante ni décroissante donc l'affirmation 2 est fausse.
3. L'affirmation 3 est vraie.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$ donc
 $\frac{n^2}{(n+1)^2} \leq w_n \leq \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$ avec $(n+1)^2 > 0$ donc $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leq w_n \leq \frac{n(n+1)}{(n+1)^2}$
donc $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leq w_n \leq \frac{n}{n+1}$ donc $u_n^2 \leq w_n \leq u_n$ avec $u_n = \frac{n}{n+1}$.
Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$ d'après le théorème des gendarmes donc l'affirmation 4 est vraie.
5. On a $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1$.
On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ comme quotient de limites donc l'affirmation 5 est fausse.

Sujet D page 161

$$1. \quad u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{2+3 \times 3}{4+3} = \frac{11}{7}$$

$$2. \quad (a) \quad B_3 = \frac{2+3 \cdot B_2}{4+B_2}$$

(b) (u_n) semble converger vers 1

3. f est une fonction définie et dérivable sur $[0;4]$ comme quotient de deux fonctions affines définies et dérivables sur $[0;4]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;4]$.

$$\forall x \in [0;4], f'(x) = \frac{3(4+x) - 1(2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{12-3x-2+3x}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $[0;4]$.

4. Montrons, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

Initialisation: pour $n=0$ on a $u_0=3$ et $u_1=\frac{11}{7}$ donc $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ pour lequel

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

Hérédité : comme f est croissante sur $[0;4]$ on déduit que

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3) \text{ donc } \frac{5}{5} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{11}{7} \text{ donc } 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3 \text{ donc la}$$

propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la propriété est initialisée au rang $n=0$, héréditaire donc vraie pour tout entier naturel d'après le principe du raisonnement par récurrence.

5. $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n$ donc (u_n) est minorée par 1.

(u_n) est donc décroissante et minorée donc convergente.

Sujet E page 161**Partie A**

K	W	U	V
0		2	10
1	2	$\frac{14}{3}$	8
2	$\frac{14}{3}$	$\frac{52}{9}$	$\frac{43}{6}$

Partie B

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} \right) = \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{-5u_n + 5v_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

(b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n) = \frac{5}{12}w_n$ donc (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$ et de 1^{er} terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-w_n}{4} < 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $w_n = v_n - u_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$ donc $u_n = v_n - 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$.

Or $8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$ donc $u_n = v_n - 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \leq v_n \leq v_0 = 10$ car (v_n) est décroissante de 1^{er} terme $v_0 = 10$ donc $u_n \leq v_0 = 10$.

De même, on a $w_n = v_n - u_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$ donc $v_n = u_n + 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$

Or $8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$ donc $v_n = u_n + 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n \geq u_n \geq u_0 = 2$ car (u_n) est croissante de 1^{er} terme $u_0 = 2$ donc $v_n \geq 2$.

(c) (u_n) est croissante et majorée par 10 donc convergente.

(v_n) est décroissante et minorée par 2 donc convergente.

3. Soit $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - u_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L' - L = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{5}{12} < 1$ donc $L' = L$

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3u_n + 4v_n$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (3u_{n+1} + 4v_{n+1}) - (3u_n + 4v_n) \\ t_{n+1} - t_n &= \left(3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4}\right) - (3u_n + 4v_n) \\ t_{n+1} - t_n &= 2u_n + v_n + u_n + 3v_n - 3u_n - 4v_n = 0 \end{aligned}$$

donc (t_n) est constante égale à $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 46$.

On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 46$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3u_n + 4v_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3u_n + 4v_n) = 3L + 4L = 7L$

Or (t_n) est constante donc $7L = 46$ donc $L = \frac{46}{7}$.