

Exercice

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 dans les cas suivants :

$$u_n = -\sqrt{n} + \cos(n^2)$$

$$u_n = \frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$$

Correction

Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $u_n = -\sqrt{n} + \cos(n^2)$. On a :

Or, $-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$ donc $-\sqrt{n} - 1 \leq -\sqrt{n} + \cos(n^2) \leq -\sqrt{n} + 1$ donc $-\sqrt{n} + \cos(n^2) \leq -\sqrt{n} + 1$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} + 1 = -\infty$ comme somme de limites usuelles

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ d'après le théorème de comparaison de limites.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $u_n = \frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$. On a $u_n = \frac{n^2(2 + \frac{(-1)^n}{n^2})}{n^2(1 - \frac{1}{n^2})} = \frac{(2 + \frac{(-1)^n}{n^2})}{(1 - \frac{1}{n^2})}$.

Or, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $2 - \frac{1}{n^2} \leq 2 + \frac{(-1)^n}{n^2} \leq 2 + \frac{1}{n^2}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \frac{1}{n^2}) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{n^2}) = 2$ comme somme de limites usuelles donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{(-1)^n}{n^2}) = 2$

d'après le théorème des gendarmes.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = 1$ comme somme de limites usuelles.

On déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \frac{(-1)^n}{n^2})}{(1 - \frac{1}{n^2})} = 2$ comme quotient de limites.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$