Chapitre 2 : Équations, inéquations et intervalles

I. Équations du 1^er^ degré

1. Équations équivalentes

Définition : Deux équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont le **même ensemble de solutions**.

Propriété : Étant donné une équation, on obtient une **équation équivalente** lorsque :

- on additionne ou on soustrait une même expression aux deux membres de l'équation
- on multiplie ou on divise les deux membres de l'équation par une même expression non nulle.

2. Équations du type $ax=b$ avec $a\neq 0$

Propriété : une équation du type $ax=b$ avec $a\neq 0$ admet une unique solution $\frac{b}{a}$

3. Équations du type $ax+b=c$ avec $a\neq 0$

Propriété : une équation du type $ax+b=c$ avec $a\neq 0$ admet une unique solution $\frac{c-b}{a}$

4. Équations du type $ax+b=cx+d$ avec $a\neq 0$ et $c\neq 0$

Propriété : une équation du type $ax+b=cx+d$ avec $a\neq 0$ admet :

- si $a=c$ et $b=d$ l'équation $ax+b=cx+d$ avec $a\neq 0$ admet une infinité de solutions
- si $a=c$ et $b\neq d$ l'équation $ax+b=cx+d$ avec $a\neq 0$ n'admet aucune solution
- si $a\neq c$ l'équation $ax+b=cx+d$ avec $a\neq 0$ admet une unique solution $\frac{d-b}{a-c}$

Remarque : voir la fiche 1 d'exercices pour traiter ces trois types d'équations.

II. Inégalités

Dans toute la suite a, b, c, d et k désignent des nombres réels.
En outre, les propriétés ci-dessous écrites avec les signe < ou > restent vraies avec les signes ≤ ou ≥

Propriétés : **Opérations sur les inégalités**

- Ajouter ou soustraire un même nombre au deux membres d'une inégalité ne change pas l'ordre de cette inégalité

$$\text{Si } a< b \text{ alors } a+c< b+c \text{ et } a-c< b-c$$

- Multiplier ou diviser une une inégalité par un nombre strictement positif ne change pas l'ordre de cette inégalité

$$\text{Si } a< b \text{ et } k> 0 \text{ alors } k\times a< k\times b \text{ et } \frac{a}{k}< \frac{b}{k}$$

- Multiplier ou diviser une une inégalité par un nombre strictement négatif change l'ordre de cette inégalité

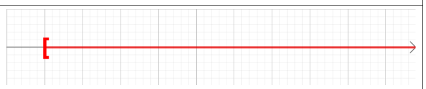
$$\text{Si } a< b \text{ et } k< 0 \text{ alors } k\times a> k\times b \text{ et } \frac{a}{k}> \frac{b}{k}$$

Propriété : Inégalité et somme

$$\boxed{\text{Si } a < b \text{ et } c < d \text{ alors } a + c < b + d}$$

III. Intervalles

Définition : Soit a et b deux nombres réels.

Intervalle	Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique
$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a;b[$	$a \leqslant x < b$	
$[\ a;+\infty[$	$a \leqslant x$	
$]\ a;+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	
$]-\infty;+\infty[$	$x \in \mathbb{R}$	

Remarque :

- *Tout intervalle du type [a ; b] est dit fermé*
- *Tout intervalle du type]a ; b[est dit ouvert*
- *Tout intervalle du type [a ; b[ou]a ; b] est dit semi-ouvert*
- *Le symbole ∞ désigne l'infini*

Exercice 1

Traduire à l'aide d'un intervalle les phrases suivantes :

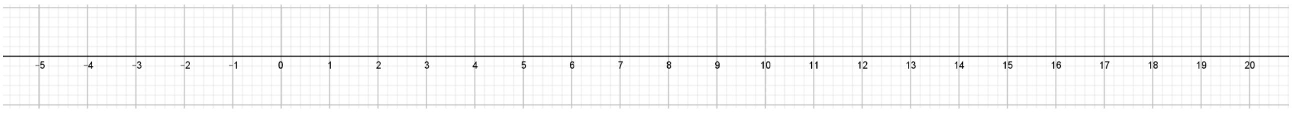
1. Les nombres réels compris entre 3 inclus et 7 inclus
2. Les nombres réels strictement inférieurs à -1
3. Tous les nombres réels
4. Les nombres réels compris entre -3 exclus et 4 inclus
5. Les nombres réels compris entre -2 exclus et 5 exclus
6. Les nombres réels strictement supérieurs à -3
7. Les nombres positifs ou nuls
8. Les nombres négatifs ou nuls.

IV. Intersection et réunion de deux intervalles

Définition : L'**intersection** de deux intervalles I et J est noté $I \cap J$ et est composée de tous les éléments appartenant à la fois à I et à J.

Remarque : 1 n'est pas premier car il n'admet qu'un seul diviseur : lui-même

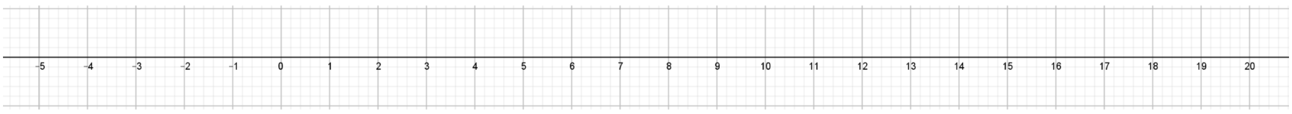
Exercice 2 : Déterminer $[-1;19\ ]\cap[\ -4;11]$



Définition : La **réunion** de deux intervalles I et J est noté $I \cup J$ et est composée de tous les éléments appartenant à l'intervalle I ou à l'intervalle J

Remarque : le « ou » mathématique n'a pas la même signification que le « ou » littéraire.
En effet, un élément de $I \cup J$ *peut appartenir à I uniquement ou bien à J uniquement ou bien à* $I \cap J$

Exercice 3 : Déterminer $[-1;19\ ]\cup[\ -4;11]$



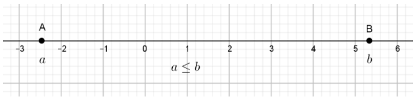
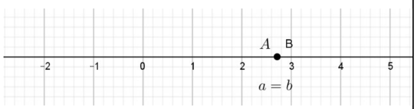
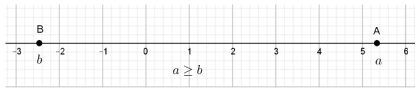
Remarque : On peut écrire $]-\infty;0[\ \cup]0;+\infty]=\mathbb{R}^*$. $\mathbb{R}^*$ *est l'ensemble des réels non nuls.*

V. Valeur absolue

1. Distance entre deux réels

Définition : La **distance entre deux réels** a **et** b est la **distance entre les points A et B** d'abscisses respectives a **et** b sur la droite numérique.
On la note $|a-b|$ et on lit **valeur absolue de** $a-b$.

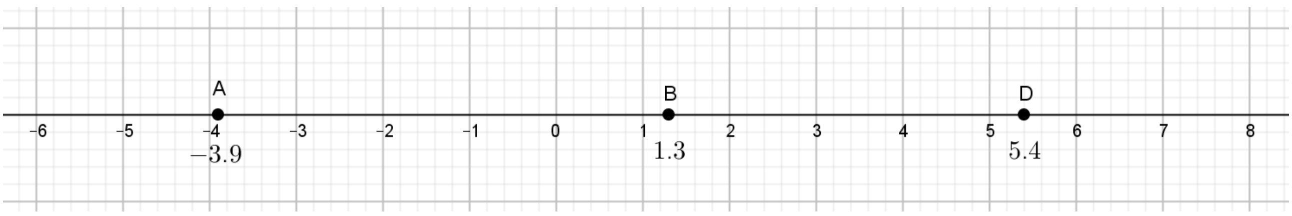
Propriété :

$\lvert a-b\rvert=b-a$ si $a<b$	$\lvert a-b\rvert=0$ si $a=b$	$\lvert a-b\rvert=a-b$ si $a>b$
		

Remarques :

- $AB=|a-b|$ *est égale à la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite*
- $|a-b|$ *est toujours un réel positif ou nul*
- $|a-b|=|b-a|$ car $AB=BA$

Exercice 4 : Sur la droite graduée ci-dessous, déterminer par le calcul les longueurs AB, AD et BD



2. Valeur absolue d'un réel

Définition : La **valeur absolue d'un réel** x notée $|x|$ est la distance entre un point M d'abscisse x et l'origine O de la droite numérique.

Propriété :

$|x|=x$ si $x>0$ $\quad$ $|x|=0$ si $x=0$ $\quad$ $|x|=-x$ si $x<0$

Remarques :

- $OM=|x|$
- $|x|$ *est toujours un réel positif ou nul*
- $|x|=|-x|$ car $OM=MO$

Exercice 5 : Compléter

$|5|=\dots$ $|-3{,}461|=\dots$ $|-\pi|=\dots$ $|\sqrt{7}|=\dots$ $|-\sqrt{11}|=\dots$

Propriété : $[a-r\,;a+r]=\{x\in\mathbb{R} \text{ tels que } |x-a|\leqslant r\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ tels que } -r\leqslant x-a\leqslant r\}$

Démonstration :
Soit $x\in\mathbb{R}$, on a $x\in[a-r\,;a+r]$ équivaut à $-r\leqslant x-a\leqslant r$ équivaut à $-r\leqslant a-x\leqslant r$

Or la distance du réel x au réel a vaut $|x-a|=x-a \text{ si } x\geqslant a$ ou $|x-a|=a-x \text{ si } x\leqslant a$ donc :

$x\in[a-r\,;a+r]$ équivaut à $|x-a|\leqslant r$ #

Remarques:

- *L'expression « équivaut à » ou « si et seulement » se note en mathématique* $\Leftrightarrow$
- $x\in[a-r\,;a+r]\Leftrightarrow|x-a|\leqslant r$
- *L'intervalle* $x\in[a-r\,;a+r]$ *est un intervalle centré en* a