Chapitre 1 : Raisonnement par récurrence

I. Introduction

En mathématiques, certaines propriétés dépendent d'un entier naturel n .
Par exemple, étant donné un réel $a \in \mathbb{R}+^*$ l'inégalité de Bernoulli affirme que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ , on a } (1+a)^n \geqslant 1+na$$

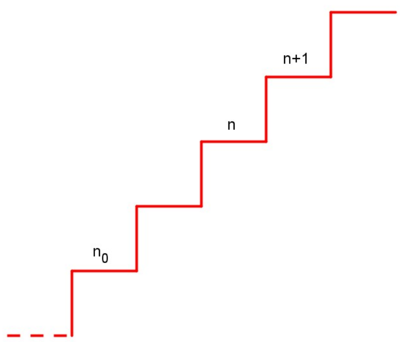
Pour $n=0$, on a $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$
Pour $n=1$, on a $(1+a)^1 = 1+a$ et $1+1\times a = 1+a$ donc $(1+a)^1 \geqslant 1+1\times a$
Pour $n=2$, on a $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 \geqslant 1+2a$ et $1+2\times a = 1+2a$ donc $(1+a)^2 \geqslant 1+2\times a$

Même si on vérifie que la propriété est vraie pour tous les entiers naturels jusqu'à 100 ou 1000 ou 10 000 ou ..., cela ne démontre pas que la propriété est vraie pour tout entier naturel.

II. Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer l'inégalité de Bernoulli, on utilise le principe du raisonnement par récurrence que l'on doit aux mathématiciens Guiseppe Peano (1858-1932) et
Henri Poincaré (1854-1912).

Le principe du raisonnement par récurrence peut s'illustrer à l'aide d'un escalier.
Si on sait accéder à une marche n_0 (initialisation) et que l'on sait passer d'une marche n à la suivante (n+1) (hérédité) alors on peut accéder à toutes les marches au dessus de la marche n_0 .



Principe du raisonnement par récurrence :

SI

- une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 (Initialisation)
- elle est supposée encore vraie pour un entier naturel $n \geqslant n_0$ (Hypothèse de récurrence)
- on démontre qu'elle demeure encore vraie au rang suivant $n+1$ (Hérédité)

ALORS elle est vraie pour tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

III. Applications

Démontrons maintenant l'inégalité de Bernoulli par récurrence
Soit $a \in \mathbb{R}+^*$. Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ la propriété : « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

Initialisation : Montrons que $P(0)$ est vraie
Pour $n=0$, on a $(1+a)^0=1$ et $1+0\times a=1$ donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$
donc $P(0)$ est vraie

Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ soit vraie c'est à dire que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Hérédité : Montrons que $P(n+1)$ est encore vraie
On a $(1+a)^{n+1}=(1+a)^n\times(1+a)\geqslant(1+na)\times(1+a)$ d'après l'hypothèse de récurrence
donc $(1+a)^{n+1}\geqslant(1+na)+(1+na)\times a$
donc $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+na+a+na^2$
donc $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a+na^2$
Or $a>0$ et $n\geqslant 0$ donc $na^2\geqslant 0$
donc $(1+a)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)a$
donc $P(n+1)$ est encore vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang $n=0$ et héréditaire donc la propriété est vraie pour tout entier naturel d'après le principe du raisonnement par récurrence. Ainsi,

$$\forall a>0, \forall n\in\mathbb{N}, (1+a)^n\geqslant 1+na$$

Exercice 1
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n+1$.
Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2^n-1$.

Exercice 2

Démontrer par récurrence que $1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3 :
(a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, la somme des n premiers entiers impairs est égale au carré de n c'est à dire $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ ou encore $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$
(b) On prend un cube et on place en dessous de celui-ci trois cubes ; on place ensuite cinq cubes en dessous de ces trois cubes etc etc (comme ci-contre). Combien utilise-t-on de cubes si l'on a dressé 100 rangées de cubes ?