Exercice 39 page 28
Soit (u_n) une suite définie par $u_0=6$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2u_n-5$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n=2^n+5$.

Correction
Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n): u_n=2^n+5$.
Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation
$u_0=6$ et $2^0+5=1+5=6$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

Hérédité
Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

On a $u_n=2^n+5$ donc $2u_n=2(2^n+5)=2^{n+1}+10$ donc $2u_n-5=2^{n+1}+10-5=2^{n+1}+5$
donc $u_{n+1}=2^{n+1}+5$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Exercice 42 page 28
Soit (v_n) une suite définie par $v_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=\frac{3}{5}v_n+2$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n\leqslant 5$.

Correction
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $P(n): v_n\leqslant 5$.
Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

Initialisation
$v_1=2\leqslant 5$ donc la propriété est vraie au rang $n=1$.

Hérédité
Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

On a $v_n\leqslant 5$ donc $\frac{3}{5}v_n\leqslant\frac{3}{5}\times 5$ donc $\frac{3}{5}v_n\leqslant 3$ donc $\frac{3}{5}v_n+2\leqslant 3+2$ donc $v_{n+1}\leqslant 5$
donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 1 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Exercice 44 page 28

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=8$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

1. Calculer u_1 .
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}\leqslant u_n$.
3. En déduire le sens de variations de (u_n) .

Correction

1. $u_1=\frac{1}{4}u_0+3=\frac{1}{4}\times 8+3=2+3=5$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n): u_{n+1}\leqslant u_n$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

<u>Initialisation</u>
$u_0=8$ et $u_1=5$ donc $u_1\leqslant u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

<u>Hérédité</u>
Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

On a $u_{n+1}\leqslant u_n$ donc $\frac{1}{4}u_{n+1}\leqslant\frac{1}{4}u_n$ car $\frac{1}{4}>0$ donc $\frac{1}{4}u_{n+1}+3\leqslant\frac{1}{4}u_n+3$ donc $u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

3. D'après le 2., on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 46 page 28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-2x^2+x-2$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Déterminer $f'(x)$ puis étudier les variations de f .
2. (a) Justifier que $u_1=-1$.

   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}\leqslant u_n$.

   (c) Conclure quant au sens de variations de (u_n) .

Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-2x^2+x-2$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

   $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=6x^2-4x+1$

   Étude du signe de $f'(x)$

   $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times6\times1=16-24=-8<0$ donc $f'(x)$ est du signe de $a=6>0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$.

   On déduit que f est strictement croissante donc croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $u_1=f(u_0)=f(1)=2\times1^3-2\times1^2+1-2=-1$

   b) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n): u_{n+1}\leqslant u_n$.

   Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

   <u>Initialisation</u>

   $u_0=1$ et $u_1=-1$ donc $u_1\leqslant u_0$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

   <u>Hérédité</u>

   Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

   On a $u_{n+1}\leqslant u_n$.

   Or f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ donc $u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

   <u>Conclusion</u> : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

   c) D'après le b), on a $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 47 page 28

Soit la suite définie par $u_0=0{,}7$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $[\,0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+2x}$.

   (a) Étudier les variations de f sur $[\,0;+\infty[$.
   (b) En déduire que, si $x\in[\,0;1]$ alors $f(x)\in[0;1]$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0\leqslant u_n\leqslant 1$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Correction

Soit f la fonction définie sur $[\,0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+2x}$.

1. a) f est dérivable sur $[\,0;+\infty[$ comme comme quotient de deux fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[\,0;+\infty[$.

   $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\dfrac{3(1+2x)-2\times 3x}{(1+2x)^2}=\dfrac{3+6x-6x}{(1+2x)^2}=\dfrac{3}{(1+2x)^2}$

   Or $\forall x\geqslant 0, (1+2x)^2>0$ donc $f'(x)>0$

   donc f est strictement croissante donc croissante sur $[\,0;+\infty[$.

   b) f est strictement croissante sur $[\,0;+\infty[$ donc

   si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$. Or $f(0)=0$ et $f(1)=\dfrac{3}{3}=1$.

   On déduit que si $0\leqslant x\leqslant 1$ alors $0\leqslant f(x)\leqslant 1$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n): 0\leqslant u_n\leqslant 1$.
   Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

   <u>Initialisation</u>
   $u_0=0{,}7\in[\,0;1]$ donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

   <u>Hérédité</u>
   Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

   On a $0\leqslant u_n\leqslant 1$. Or f est croissante sur $[\,0;+\infty[$ donc $f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(1)$.
   Or $f(0)=0; f(1)=1$ et $f(u_n)=u_{n+1}$ donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$ donc $P(n+1)$ est vraie.

   <u>Conclusion</u> : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n}{1+2u_n}-u_n=\dfrac{3u_n-u_n-2u_n^2}{1+2u_n}=\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.

   Or $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant 1$ donc $-1\leqslant -u_n\leqslant 0$ donc $0\leqslant 1-u_n\leqslant 1$ et $(1+2u_n)>0$.
   De plus $(1+2u_n)>0$. On déduit que $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

Exercice 48 page 28

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+....+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+....+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

<u>Initialisation</u>

Pour $n=1$, on a $\sum_{k=1}^{1} k = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u>

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{donc} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 .$$

Or $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2\right)$. On déduit que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} .$$

donc $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$.

Or $(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$. On déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$ donc $P(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : la propriété est initialisée au rang $n=1$ et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel non nul d'après le principe du raisonnement par récurrence.

Exercice 49 page 28

Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Correction

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n): \sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

Initialisation

Pour $n=1$, on a $\sum_{k=1}^{1} k^3=1^3=1$ et $\frac{1^2\times(1+1)^2}{4}=\frac{1\times 4}{4}=1$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ pour lequel $P(n)$ est vraie (HR).

On a $\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ donc $\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$.

Or $\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)+(n+1)^3=\left(\sum_{k=1}^{n+1} k^3\right)$. On déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est initialisée au rang $n=1$ et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel non nul d'après le principe du raisonnement par récurrence.