

**Exercice 1**

Soit  $(u_n)_n$  la suite définie par  $u_0=0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1}=2u_n+1$ .

Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n=2^n-1$ .

**Correction**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P(n):u_n=2^n-1$ .

Montrons par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Initialisation : Pour  $n=0$ , on a  $u_0=0$  et  $2^0-1=1-1=0$  donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier  $n \geq 0$  pour lequel  $P(n)$  est vraie (HR).

Au rang suivant,  $(n+1)$ , on a  $u_{n+1}=2u_n+1=2(2^n-1)+1$  d'après (HR) donc

$$u_{n+1}=2^{n+1}-2+1=2^{n+1}-1 \text{ donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion :  $P(n)$  est initialisée au rang 0 et héréditaire donc  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  d'après le principe du raisonnement par récurrence.

## Exercice 2

Démontrer par récurrence que  $1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

## Correction

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P(n): 1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Montrons par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Initialisation : Pour  $n=0$ , on a  $\sum_{k=0}^0 k=0$  et  $\frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$  donc  $P(0)$  est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier  $n \geq 0$  pour lequel  $P(n)$  est vraie (HR) c'est à dire un lequel  $1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Au rang suivant,  $(n+1)$ , on a :

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \left( \sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ d'après (HR)}$$

donc  $1+2+3+\dots+n+(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  donc  $P(n+1)$  est vraie.

Conclusion :  $P(n)$  est initialisée au rang 0 et héréditaire donc  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$  d'après le principe du raisonnement par récurrence.

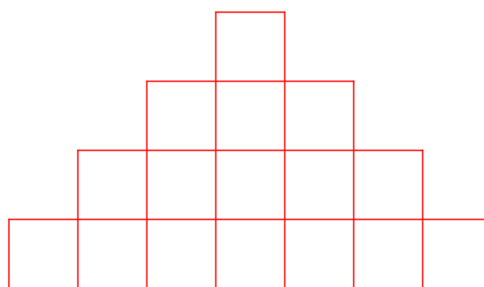
Exercice 3 :

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , la somme des  $n$  premiers entiers impairs est égale au

carré de  $n$  c'est à dire  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$  ou encore

$$1+3+\dots+(2n-1)=n^2$$

(b) On prend un cube et on place en dessous de celui-ci trois cubes ; on place ensuite cinq cubes en dessous de ces trois cubes etc etc (comme ci-contre). Combien utilise-t-on de cubes si l'on a dressé 100 rangées de cubes ?



Correction

(a)

Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  et  $P(n) : \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ .

Montrons par récurrence que  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

Initialisation : Pour  $n=1$ , on a  $\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1$  et  $1^2 = 1$  donc  $P(1)$  est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier  $n \geq 1$  pour lequel  $P(n)$  est vraie (HR) c'est à dire pour lequel  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$  (HR).

Au rang suivant,  $(n+1)$ , on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + (2(n+1)-1) \text{ d'après (HR) donc}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \text{ donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : la propriété est initialisée au rang  $n=1$  et héréditaire donc vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  d'après le principe du raisonnement par récurrence.

(b) Si on construit 100 rangées comme indiqué sur la figure, il faudra  $\sum_{k=1}^{100} (2k-1) = 100^2 = 10\,000$  cubes au total.