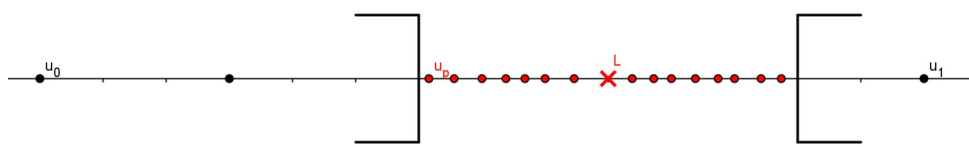


Chapitre 2 : Les suites

I. Limite finie ou infinie d'une suite

1. Suites convergentes et suites divergentes

Définition : Une suite $(u_n)_n$ converge vers le réel L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.



à partir d'un certain rang, les termes de la suite s'accumulent autour de L

Remarque : pour l'intervalle ouvert contenant L , on peut prendre un intervalle I ouvert centré en L de la forme $I =]L - a; L + a[$ avec $a > 0$

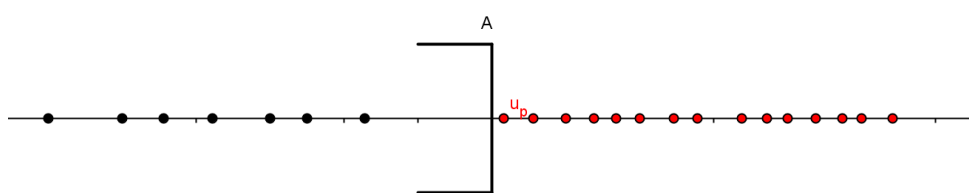
Remarque : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$.

1. k étant un nombre naturel quelconque, montrer que l'on peut trouver un entier naturel n tel que $1 - 10^{-k} < u_n < 1 + 10^{-k}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

Définition : Une suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert du type $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



à partir d'un certain rang, les termes de la suite dépassent n'importe quel réel A

Définition : Une suite $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$ si la suite $(-u_n)_n$ diverge vers $+\infty$. On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Remarque : si une suite diverge, alors soit sa limite est égale à $+\infty$, soit sa limite est égale à $-\infty$, soit elle n'a pas de limite (par exemple, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ n'a pas de limite car elle prend alternativement les valeurs +1 et -1.)

Propriété :

1. Les suites de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ convergent vers 0
2. Les suites de terme général $\sqrt{n}, n, n^2, \dots, n^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ divergent vers $+\infty$
3. Toute suite constante converge vers la valeur de la constante

Preuve : convergence de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.

Soit $I =]-a; a[$ un intervalle ouvert centré en 0 avec $a > 0$.

Pour tout $n > \frac{1}{a}$, on a $0 < \frac{1}{n} < a$ donc $-a < \frac{1}{n} < a$ donc pour tout entier naturel $n > \frac{1}{a}$, le terme

u_n appartient à l'intervalle $]-a; a[$ donc $(u_n)_n$ converge vers 0. #

Propriété : Si une suite $(u_n)_n$ converge alors sa limite est unique.

2. Algorithme de détermination d'un seuil à partir duquel $u_n \geq A$ dans le cas d'une suite croissante de limite infinie

A savoir : la boucle « Tant que » permet de répéter une action jusqu'à l'obtention d'une condition de sortir. Par exemple, ci-dessous, le calcul est répété jusqu'à trouver un terme de la suite supérieur ou égal à A. La boucle s'arrête alors et c'est l'indice du terme trouvé qui est affiché c'est à dire le seuil cherché.

Exemple : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^3 - 7$. On peut démontrer que $(u_n)_n$ est croissante et que sa limite est $+\infty$. Ci-dessous, un algorithme permettant de déterminer le seuil à partir duquel $u_n > A$ pour un nombre A donné au départ.

```
Saisir A
u prend la valeur -7
n prend la valeur 0
Tant que u ≤ A
    n prend la valeur n+1
    u prend la valeur 2n³ - 7
Fin Tant que
Afficher n
```

```
1 def seuil_1(A):
2     u=-7
3     n=0
4     while u<=A:
5         n=n+1
6         u=2*n**3-7
7     return n
```

Exercice 2 :

Un pays compte 30 millions d'habitants en 2011. Cette population s'accroît naturellement chaque année de 10 %; Par ailleurs, ce pays accueille chaque année 1 million d'immigrés. Soit $(u_n)_n$ le nombre d'habitants en millions de ce pays lors de l'année (2011+n).

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2. En posant $v_n = u_n + 10$, montrer que $(v_n)_n$ est géométrique. Calculer alors v_n en fonction de n.
3. En déduire u_n en fonction de n.
4. Programmer un algorithme permettant de déterminer au bout de combien d'années la population de ce pays dépassera 150 millions d'habitants.

II. Opérations sur les limites

Dans toute la suite, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ désignent deux suites. On veut déterminer, sans revenir aux définitions, les limites des suites $(u_n + v_n)_n$, $(u_n v_n)_n$ et $(\frac{u_n}{v_n})_n$ à partir des limites de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Pour cela, on dispose de théorèmes généraux sur la somme, le produit et le quotient de suites. Dans la plupart des cas, les résultats sont intuitifs, mais parfois, on ne peut pas prévoir la limite éventuelle. Ces cas sont appelés des formes indéterminées.

1. Limite d'une somme de suites

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Ind.

Remarque Ind. signifie « forme indéterminée »

2. Limite d'un produit de suites

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L > 0 ou +∞	L < 0 ou -∞	L > 0 ou +∞	L < 0 ou -∞	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	+∞	+∞	-∞	-∞	-∞ ou +∞
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$	LL'	+∞	-∞	-∞	+∞	Ind.

3. Limite d'un quotient de suites

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	-∞ ou +∞	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L' ≠ 0	-∞ ou +∞	0 et v_n > 0	0 et v_n < 0	0 et v_n > 0	0 et v_n < 0	-∞ ou +∞	0
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	0	+∞	-∞	-∞	+∞	Ind.	Ind.

4. Formes indéterminées

Il y a quatre formes indéterminées qui sont usuellement notées :

$$\ll \infty - \infty \gg, \ll 0 \times \infty \gg, \ll \frac{\infty}{\infty} \gg, \ll \frac{0}{0} \gg$$

Pour lever une indétermination, le principe est alors de transformer l'écriture de l'expression étudiée pour se ramener aux théorèmes généraux.

Exercice 3 :

Déterminer les limite des suites définies par :

$$u_n = n^2 + 4n + 1 \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n + 3) \text{ pour } n \geq 1 \quad p_n = u_n v_n \quad q_n = \frac{1}{u_n}$$

Exercice 4 :

Déterminer les limite des suites définies par :

$$r_n = n^2 - 4n + 1 \quad u_n = 2\sqrt{n} - n \quad v_n = \frac{n^2 + 3n}{3n^2 + 4} \quad w_n = \frac{n + 3}{n^2 - 2}$$

III. Théorèmes généraux sur les limites

1. Limites et comparaison

Théorème :

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Preuve exigible au programme

Soit A un réel.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc il existe un entier naturel n_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0, u_n > A$.
- De plus, $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang donc il existe un entier naturel n_1 tel que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_1$ on a $u_n \leq v_n$.
- Soit N un entier supérieur ou égal à n_0 et n_1 alors pour tout entier naturel n tel que $n \geq N$ on a $u_n > A$ et $u_n \leq v_n$ donc $v_n > A$, donc par définition $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ #

Théorème :

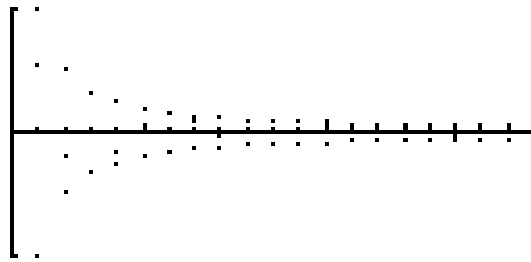
Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites telles que $v_n \leq u_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

« Théorème des gendarmes »

Si $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ sont trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers L alors $(v_n)_n$ converge aussi vers L .

Remarque : ce théorème est admis

Exemple : Graphiquement, cela peut se traduire par une situation comme celle-ci :



Exercice 5 :

Étudier la convergence des suites définies par $u_n = \frac{n + \sin n}{n - \sin n}$ pour $n > 1$ et $v_n = n^2 + (-1)^n$.

2. Comportement à l'infini de la suite géométrique q^n avec q réel

q^n	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	N'existe pas	0	1	$+\infty$

Preuve exigible au programme dans le cas où $q > 1$

Prérequis : pour tout réel , $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Soit $u_n = q^n$. Si $q > 1$ alors on peut poser $q = 1 + \alpha$ avec $\alpha > 0$. On a alors $q^n = (1 + \alpha)^n$.

D'après le prérequis, on a $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ donc $q^n \geq 1 + n\alpha$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n\alpha = +\infty$ car $\alpha > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison #

Exercice 6 :

1. Étudier la convergence des suites définies par :

$$u_n = \frac{2}{3^n} \quad v_n = -3(\sqrt{2})^n \quad w_n = \frac{(-3)^n}{5} \quad x_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p \quad \text{avec} \quad u_p = \frac{2}{3^p}$$

2. Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = 2^n - 3^n$ pour tout entier naturel n

IV. Théorèmes de convergence monotone

Définitions :

- (1) Une suite $(u_n)_n$ est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
 M est alors appelé un majorant de la suite $(u_n)_n$
- (2) Une suite $(u_n)_n$ est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
 m est alors appelé un minorant de la suite $(u_n)_n$
- (3) Une suite $(u_n)_n$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarques :

- Tout réel supérieur à un majorant est aussi un majorant
- Tout réel inférieur à un minorant est aussi un minorant

Cas particuliers à connaître :

- les suites de terme général $\sin n, \cos n, (-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par -1 donc bornées.
- Toute suite croissante est minorée par son 1^{er} terme u_p .
 En effet, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n \geq u_{n-1} \geq \dots \geq u_p$
- Toute suite décroissante est majorée par son 1^{er} terme u_p .
 En effet, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_p$

Propriété : Toute suite croissante admettant pour limite L est majorée par L

Preuve « par l'absurde » :

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante qui converge vers L telle qu'il existe un entier naturel p tel que $u_p > L$.

Comme $(u_n)_n$ est croissante alors $\forall n \geq p, u_n \geq u_p$ (1)

Or $L - 1 < L$

On déduit que $L - 1 < L < u_p$ donc l'intervalle ouvert $I =]L - 1; u_p[$ contient L .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ alors l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ce qui contredit (1) donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq L$ #

Théorèmes de convergence monotone :

- (1) Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente
- (2) Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente

Remarques:

- ce théorème est admis
- ce théorème donne l'existence de la limite mais pas sa valeur

Corollaire : Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$ **Preuve exigible au programme**

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante non majorée et A un réel quelconque.

Comme $(u_n)_n$ n'est pas majorée, il existe au moins un entier naturel p tel que $u_p > A$.

La suite $(u_n)_n$ étant croissante, on a $\forall n \geq p, u_n \geq u_p > A$ donc tous les termes de la suite

appartiennent à l'intervalle ouvert $]A; +\infty[$ à partir d'un certain rang p donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ #