Exercice 1

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$.

1. k étant un nombre naturel quelconque, montrer que l'on peut trouver un entier naturel n tel que $1-10^{-k} < u_n < 1+10^{-k}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

Correction

1. $1-10^{-k} < u_n < 1+10^{-k} \Leftrightarrow 1-10^{-k} < 1+\frac{1}{n+1} < 1+10^{-k} \Leftrightarrow -10^{-k} < \frac{1}{n+1} < 10^{-k}$
   $\Leftrightarrow -(n+1)\times 10^{-k} < 1 < (n+1)10^{-k}$.
   Ainsi, pour $n > 10^k - 1$ on a $1-10^{-k} < u_n < 1+10^{-k}$.
   Ainsi pour $n = N_k = 10^k$ on a $1-10^{-k} < u_{N_k} < 1+10^{-k}$.

2. On vient de démontrer qu'on peut toujours trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à un intervalle ouvert centré en 1 ce qui est la définition de la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers 1.

Exercice 2

Un pays compte 30 millions d'habitants en 2011. Cette population s'accroît naturellement chaque année de 10 %; Par ailleurs, ce pays accueille chaque année 1 million d'immigrés. Soit $(u_n)_n$ le nombre d'habitants en millions de ce pays lors de l'année (2011+n).

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2. En posant $v_n=u_n+10$, montrer que $(v_n)_n$ est géométrique. Calculer alors v_n en fonction de n.
3. En déduire u_n en fonction de n.
4. Programmer un algorithme permettant de déterminer au bout de combien d'années la population de ce pays dépassera 150 millions d'habitants.

Correction

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $u_{n+1}=(1+\frac{10}{100})u_n+1=1,1u_n+1$ et $u_0=30$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $v_{n+1}=u_{n+1}+10=1,1u_n+11=1,1(u_n+10)=1,1v_n$ donc $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q=1,1$ et de 1^er^ terme $v_0=u_0+10=40$.
3. On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=40\times1,1^n \text{ donc } u_n=40\times1,1^n-10$.
4.

```
U ← 30
N ← 0
Tant que U ≤ 150
        U ← 1,1×U+1
        N ← N+1
Fin Tant que
```

Exercice 3

Déterminer les limite des suites définies par :

$$u_n = n^2 + 4n + 1 \qquad v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(-n+3) \text{ pour } n \geqslant 1 \qquad p_n = u_n v_n \qquad q_n = \frac{1}{u_n}$$

Correction

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ par somme de limites.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$
  $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-n+3) = -\infty$
  d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ par produit de limites.
- Par produit de limites, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = -\infty$.
- Par quotient ou inverse de limite on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$.

Exercice 4

Déterminer les limite des suites définies par :

$r_n=n^2-4n+1$ $u_n=2\sqrt{n}-n$ $v_n=\frac{n^2+3n}{3n^2+4}$ $w_n=\frac{n+3}{n^2-2}$

Correction

- $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-4n+1$ est une FI du type $+\infty-\infty$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-4n+1=\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$

  d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})=1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=+\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n}-n$ est une FI du type $+\infty-\infty$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{2}{\sqrt{n}}-1)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{2}{\sqrt{n}}-1)=-1$

  d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ par produit de limites.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n}{3n^2+4}$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n}{3n^2+4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2(1+\frac{3}{n})}{n^2(3+\frac{4}{n})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{3}{n})}{(3+\frac{4}{n})}=\frac{1}{3}$ comme quotient de limites.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n^2-2}$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n^2-2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(1+\frac{3}{n})}{n^2(1-\frac{2}{n^2})}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{3}{n})}{n(1-\frac{2}{n})}=0$ comme quotient de limites .

Exercice 5

Étudier la convergence des suites définies par $u_n=\dfrac{n+\sin n}{n-\sin n}$ pour $n>1$ et $v_n=n^2+(-1)^n$.

Correction

- $\forall n\in\mathbb{N}, n>1, -1\leqslant\sin(n)\leqslant 1$ donc $n-1\leqslant n+\sin(n)\leqslant n+1$
  $\forall n\in\mathbb{N}, n>1, -1\leqslant\sin(n)\leqslant 1$ donc $-1\leqslant-\sin(n)\leqslant 1$ donc $n-1\leqslant n-\sin(n)\leqslant n+1$

  On déduit que :
  $\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 1, n-1\leqslant n+\sin(n)\leqslant n+1$ et $\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n-\sin(n)}\leqslant\dfrac{1}{n-1}$ donc
  $\forall n\in\mathbb{N}, n>1, \dfrac{n-1}{n+1}\leqslant\dfrac{n+\sin(n)}{n-\sin(n)}\leqslant\dfrac{n+1}{n-1}$

  Posons $\forall n\in\mathbb{N}, n>1, v_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ et $w_n=\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{1}{v_n}$.
  On a aisément, par factorisation, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=1$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

- $\forall n\in\mathbb{N}, -1\leqslant(-1)^n\leqslant 1$ donc $n^2-1\leqslant n^2+(-1)^n\leqslant n^2+1$ donc
  $\forall n\in\mathbb{N}, n^2-1\leqslant n^2+(-1)^n$.
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+(-1)^n=+\infty$ par comparaison de limites.

Exercice 6

1. Étudier la convergence des suites définies par :

$u_n=\frac{2}{3^n}$ $\quad v_n=-3(\sqrt{2})^n$ $\quad w_n=\frac{(-3)^n}{5}$ $\quad x_n=\sum_{p=0}^{n-1} u_p$ avec $u_p=\frac{2}{3^p}$

2. Déterminer la limite de la suite définie par $u_n=2^n-3^n$ pour tout entier naturel n

Correction

- $3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{3^n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$
- $\sqrt{2}>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{2})^n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -3(\sqrt{2})^n=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$
- $(-3)\leqslant-1$ donc $((-3)^n)$ diverge donc $\frac{(-3)^n}{5}$ diverge aussi
- $$x_n=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{2}{3^p}=2\times\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{3^p}=2\times\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^p=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

  $$x_n=2\times\frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=3\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

  Or $-1<\frac{1}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=3$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n-3^n$ est une FI du type $+\infty-\infty$ (car $2>1$ et $3>1$)

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n-3^n=\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\frac{2^n}{3^n}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)$.

   Or $-1<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-1$

   et $3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n=+\infty$

   Par produit des limites, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.