Exercice 1

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en $2019+n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020 et 2021.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

Exercice 2

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300m² des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m² suite à la dissémination des graines.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m², après n semaines.

On a donc $u_0=300\,m^2$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}05\,u_n+15$.

3. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=u_n+300$.
4. Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q=1{,}05$.
5. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n puis montrer que $u_n=600\times 1{,}05^n-300$.
6. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

Exercice 3

Soit la suite définie par $u_0=1$. et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=3\,u_n+10\,n-5$. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=3^n-5n$.

Correction

Exercice 1

1. $u_0=6$ donc le nombre d'abonnées en 2019 vaut 6000.
   $u_1=u_0+0{,}75=6+0{,}75=6{,}75$ donc le nombre d'abonnées en 2019 vaut 6750.
   $u_2=u_1+0{,}75=6{,}75+0{,}75=7{,}5$ donc le nombre d'abonnées en 2019 vaut 7500.

2. $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+0{,}75$

3. (u_n) est par conséquent une suite arithmétique de raison $r=0{,}75$ et de 1[er] terme $u_0=6$.

4. On déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_0+n\times r=6+0{,}75n$.

5. On cherche $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_n\geqslant 18$.
   $u_n\geqslant 18\Leftrightarrow 6+0{,}75n\geqslant 18\Leftrightarrow 0{,}75n\geqslant 12\Leftrightarrow n\geqslant\dfrac{12}{0{,}75}\Leftrightarrow n\geqslant 16$.
   Conclusion : le nombre d'abonnés aura triplé à partir de 2019+16=2035.

Exercice 2

1. $u_1=u_0\times(1+\dfrac{5}{100})+15=300\times 1{,}05+15=315+15=330\,m^2$
   $u_2=u_1\times 1{,}05+15=330\times 1{,}05+15=346{,}5+15=361{,}5\,m^2$

2. $u_1-u_0=330-300=30$ et $u_2-u_1=361{,}5-330=31{,}5\neq 30$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{330}{300}=\dfrac{11}{10}=1{,}1$ et $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{361{,}5}{330}=\dfrac{241}{220}\approx 1{,}095\neq 1{,}1$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}05u_n+15$.
On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=u_n+300$.

3. $v_0=u_0+300=300+300=600\,m^2$ .Soit $n\in\mathbb{N}$, on a :
   $v_{n+1}=u_{n+1}+300=1{,}05u_n+15+300=1{,}05u_n+315=1{,}05\left(u_n+\dfrac{315}{1{,}05}\right)=1{,}05(u_n+300)=1{,}05v_n$
   donc (v_n) est géométrique de raison $q=1{,}05$ et de 1[er] terme $v_0=600$.

4. Du 3., on déduit que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=v_0\times q^n=600\times 1{,}05^n$
   Or, $\forall n\in\mathbb{N}\, v_n=u_n+300$ donc $u_n=v_n-300=600\times 1{,}05^n-300$.

5. Après 8 semaines, la surface envahie par les chardons sera égale à
   $u_8=600\times 1{,}05^8-300\approx 586$. Or, $2\times u_0=2\times 300=600>586$ donc il est faux d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé en 8 semaines.

Exercice 3

Soit la suite définie par $u_0=1$. et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=3u_n+10n-5$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n=3^n-5n$.

Pour tout entier naturel n , notons $P(n)$ la propriété : « $u_n=3^n-5n$ ».

Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0=1$ et $3^0-5\times 0=1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ soit vraie c'est à dire que pour lequel $u_n=3^n-5n$.

On a $u_n=3^n-5n$
donc $3u_n+10n-5=3(3^n-5n)+10n-5$
donc $3u_n+10n-5=3^{n+1}-15n+10n-5$
donc $3u_n+10n-5=3^{n+1}-5n-5$
donc $3u_n+10n-5=3^{n+1}-5(n+1)$
donc $u_{n+1}=3^{n+1}-5(n+1)$
don c $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang $n=0$ et héréditaire donc la propriété est vraie pour tout entier naturel d'après le principe du raisonnement par récurrence. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n=3^n-5n$$