Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=0 \, et \, \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n+3n(n+1)+1$.

Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=n^3$.

Exercice 2

Déterminer les limite des suites définies par :

$$u_n=\frac{7}{n}+n \qquad v_n=\frac{7n^2-3n}{4n^2+5} \qquad w_n=\sqrt{n}-n^2$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur [0;3[par $f(x)=\frac{2}{3-x}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\frac{9}{5}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Calculer u_1 . Vous donnerez le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2. Étudier les variations de f sur [0;3[.
3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 2$.
4. En déduire les variations de la suite (u_n) .

Correction

Exercice 1

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(n) : u_n = n^3$.

<u>Initialisation</u> : Pour $n=0$, on a $u_0 = 0$ et $0^3 = 0$ donc $P(0)$ est vraie.

<u>Hypothèse de récurrence</u>
On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie c'est à dire $u_n = n^3$ (HR).

<u>Hérédité</u> : Au rang suivant, $(n+1)$, on a :
$u_{n+1} = u_n + 3n(n+1) + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
Or $(n+1)^3 = (n+1)^2(n+1) = (n^2+2n+1)(n+1) = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
donc $u_{n+1} = (n+1)^3$ donc $P(n+1)$ est vraie .

<u>Conclusion</u> : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3$.

Exercice 2

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{n} + n = +\infty$ comme somme de limites avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7n^2 - 3n}{4n^2 + 5}$ est une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.

  Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7n^2 - 3n}{4n^2 + 5} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2(7 - \frac{3}{n})}{n^2(4 + \frac{5}{n^2})} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(7 - \frac{3}{n})}{(4 + \frac{5}{n^2})} = \frac{7}{4}$ comme quotient de limites avec :

  $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (7 - \frac{3}{n}) = 7$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 + \frac{5}{n^2}) = 4$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - n^2$ est une FI du type $+\infty - \infty$.

  Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2(\frac{\sqrt{n}}{n^2} - 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n} \times n} - 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2(\frac{1}{n\sqrt{n}} - 1) = -\infty$

  comme produit de limites avec $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{n\sqrt{n}} - 1) = -1$.

Exercice 3

1. $u_1=f(u_0)=f(\frac{9}{5})=\frac{2}{3-\frac{9}{5}}=\frac{2}{\frac{15}{5}-\frac{9}{5}}=\frac{2}{\frac{6}{5}}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$.

2. f est dérivable sur [0;3[comme quotient de fonctions dérivables sur [0;3[dont le dénominateur ne s'annule pas sur [0;3[.

Soit $x\in[0;3[$. On a $f'(x)=2\times\frac{-(-1)}{(3-x)^2}=\frac{2}{(3-x)^2}>0$ donc f est strictement croissante sur [0;3[.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $P(n):\forall n\in\mathbb{N}, 1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 2$.
Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation : On a $u_0=\frac{9}{5}=\frac{27}{15}$ et $u_1=\frac{5}{3}=\frac{25}{15}$.
Or, $1\leqslant\frac{25}{15}\leqslant\frac{27}{15}\leqslant 2$ donc $1\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 2$ donc est vraie.

Hérédité :
Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n\geqslant 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie.

On a $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 2$.
Or, f est croissante sur [0;3[donc $f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(2)$ avec
$f(1)=\frac{2}{3-1}=\frac{2}{2}=1 ; f(u_n)=u_{n+1} ; f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(2)=\frac{2}{3-2}=\frac{2}{1}=2$
donc $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$ donc $P(n+1)$ est vraie .

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

4. D'après le 3., $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 2$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}\leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante.