

Exercice 1

Soit (u_n) définie par $u_{n+1}=2u_n-3$ et $u_0=7$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} + 3$.

Exercice 2

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$.
 - (a) Calculer la dérivée de f sur $[0; +\infty[$.
 - (b) Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
 2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 3. En déduire les variations de la suite (u_n) .
-

Correction

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(n): u_n = 2^{n+2} + 3$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0 = 7$ et $2^{0+2} + 3 = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie.

On a $u_n = 2^{n+2} + 3$.

Or, $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 7$

On déduit que $u_{n+1} = 2(2^{n+2} + 3) - 3 = 2^{n+3} + 6 - 3 = 2^{n+3} + 3$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} + 3$.

Exercice 2

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

(a) f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$.

$$\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1 \times (1+x) - 1 \times x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

(b) $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ donc f est (strictement) croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P(n): 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation : On a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{2}$. Or, $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel $P(n)$ est vraie.

On a $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. Or, f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ avec $f(0) = 0; f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

3. D'après le 2., $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.