

Chapitre 1 : Calculs numériques & ensembles de nombres

I. Priorités des opérations

1. Calculs sans parenthèses

Propriété : dans un calcul sans parenthèses et formé uniquement d'additions et de soustractions, les calculs s'effectuent de la gauche vers la droite.

Exercice 1 : calculer $A = 38 - 7 + 4$

Propriété : dans un calcul sans parenthèses, la multiplication et la division sont effectuées en priorité sur l'addition et la soustraction.

Exercice 2 : calculer $A = 5 + 6 \times 3$ et $B = 9 - 8 : 2$

Propriété : dans un calcul sans parenthèses, quand il n'y a que des additions ou que des multiplications, on peut effectuer les calculs dans l'ordre que l'on veut.

Exercice 3 : calculer $A = 25 + 132 + 75$ et $B = 5 \times 87 \times 2$

2. Calculs avec parenthèses

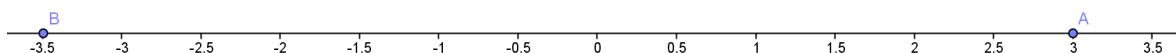
Propriété : dans un calcul avec parenthèses, les calculs entre parenthèses sont effectués en priorité.

Exercice 4 : calculer $A = 12 - (4 + 3)$ et $B = (7 + 3 \times 8) \times (9 - 3)$

II. Opérations sur les nombres relatifs

1. Distance à zéro d'un nombre

Définition : Sur une droite graduée, a est l'abscisse du point A . La distance à zéro du nombre a est la longueur du segment $[OA]$. Une distance à zéro est toujours un nombre positif ou nul.



Exemples : la distance à zéro de $(+3)$ est la longueur du segment $[OA]$ c'est à dire 3
la distance à zéro de $(-3,5)$ est la longueur du segment $[OB]$ c'est à dire 3,5

2. Additions de nombres relatifs

Règle 1 : pour additionner deux nombres relatifs de même signe,

- on additionne leurs distances à zéro
- puis on met devant le résultat obtenu le signe commun aux deux nombres

Exercice 5 : calculer $A = (+5) + (+8)$ et $B = (-7) + (-3)$

Règle 2 : pour additionner deux nombres relatifs de signes différents,

- on soustrait leurs distances à zéro
- puis on met devant le résultat obtenu le signe du nombre de plus grande distance à zéro

Exercice 6 : calculer $A = (+5) + (-8)$ et $B = (-7) + (+3)$

Propriété : pour effectuer une somme, on peut déplacer et regrouper les termes comme on veut.

Exercice 7 : calculer $A = (-7) + (+5) + (-11) + (+7) + (+3)$

3. Soustractions de nombres relatifs

Définition : opposé d'un nombre relatif

Deux nombres sont opposés lorsque leur somme est nulle.

Exemples : (-7) est l'opposé de $(+7)$ car $(-7) + (+7) = 0$
 $(+2,4)$ est l'opposé de $(-2,4)$ car $(+2,4) + (-2,4) = 0$

Remarque : Les points $A(+7)$ et $A'(-7)$ sont symétriques par rapport à l'origine O de l'axe gradué.

Règle 3 : pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé.

Exercice 8 : calculer $A = (+12) - (-4)$ et $B = (+7) - (+9)$

4. Écriture simplifiée

Règle 4 : dans une suite d'additions de nombres relatifs, on peut supprimer les signes d'additions et les parenthèses.

Règle 5 : un nombre positif écrit en début de calcul peut s'écrire sans signe.

Exercice 9 : A l'aide de l'écriture simplifiée, calculer $A = (+7) + (+11) + (-16)$

5. Multiplications de nombres relatifs.

Propriété : signe d'un produit de nombres relatifs

- Le produit de deux nombres relatifs de même signe est un nombre positif.
- Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre négatif.

Exercice 10 : déterminer le signe des produits suivants puis effectuer les calculs

$$A = (+5) \times (+3,7)$$

$$B = (+5) \times (-8,2)$$

$$C = (-4) \times (-13)$$

$$D = (-12) \times (+7,3)$$

Propriété :

- Le produit de facteurs non nuls, contenant un nombre pair de facteurs négatifs est positif.
- Le produit de facteurs non nuls, contenant un nombre impair de facteurs négatifs est négatif.

Remarque : on peut multiplier plusieurs facteurs dans n'importe quel ordre !

Exercice 11 : déterminer le signe des produits suivants puis effectuer les calculs

$$A = (+2) \times (-3) \times 2 \times (-5) \times (+2) \times (-1) \quad \text{et} \quad B = (-3) \times 7 \times (+5) \times (-1)$$

Multiplication par zéro : Si l'un des facteurs d'un produit est nul alors ce produit est nul.

Exemples : $5,5 \times 0 = 0$

$0 \times (-3,4) = 0$

6. Divisions de nombres relatifs.

Définition : inverse d'un nombre non nul

Si le produit de deux nombres est égal à 1, alors on dit que ces deux nombres sont inverses l'un de l'autre ou que l'un est l'inverse de l'autre. On note $\frac{1}{x}$ ou x^{-1} l'inverse d'un nombre non nul x .

Remarque : le nombre 0 n'a pas d'inverse !

Exemple : $2 \times 0,5 = 1$ donc 2 et 0,5 sont inverses l'un de l'autre donc $0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

Exercice 12 : Déterminer l'inverse de (-0,25).

Remarque : Ne pas confondre inverse et opposé d'un nombre

- l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$
- l'opposé de 3 est -3

Propriété : Quotient de deux nombres relatifs

Diviser un nombre a par un nombre non nul b revient à multiplier a par l'inverse de b , c'est-à-dire

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} = a \times b^{-1}$$

Exercice 13 : calculer $A = \frac{-64}{0,5}$.

Remarque : cela nous permet d'avoir deux façons de calculer un quotient

- soit on effectue une division
- soit on effectue une multiplication par l'inverse du dénominateur

Propriété : Le signe du quotient $\frac{a}{b}$ (b non nul) est le même que celui du produit $a \times b$.

III. Opérations sur les puissances

1. Définition des nombres a^n et a^{-n}

Définitions : a désigne un nombre relatif et n désigne un entier naturel.

- 1^{er} cas : par convention $a^0 = 1$
- 2^{ème} cas : si n est non nul alors le nombre « **a puissance n** » noté a^n est défini par

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

- 3^{ème} cas : si a est non nul alors le nombre « **a puissance -n** » noté a^{-n} est défini par

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

- n est appelé l'**exposant**

Cas particuliers : $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Exemples : $4^3 = 4 \times 4 \times 4$ $7^9 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

Exemples : $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$

Attention : $a^{-n} \neq a \times (-n)$ En effet, par exemple, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ et $3 \times (-2) = -6 \neq \frac{1}{9}$

2. Opérations sur les puissances

Dans tout ce paragraphe, n et m désignent deux entiers relatifs et a désigne un nombre relatif.

Règles de calculs sur les puissances :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$$

Exercice 14 : compléter les calculs suivants

$3^8 \times 3^{14} = 3^{\dots}$

$\frac{11^{23}}{11^{12}} = 11^{\dots}$

$\frac{17^9}{17^{15}} = 17^{\dots}$

$6^3 \times 4^3 = \dots$

$6^5 = (2 \times 3)^5 = 2^{\dots} \times 3^{\dots}$

$\frac{4^7}{3^7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\dots}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^{\dots}}{2^{\dots}}$

$(2^3)^5 = 2^{\dots}$

3. Cas particuliers des puissances de 10

Définitions : n désigne un entier naturel.

- 1^{er} cas : par convention $10^0 = 1$
- 2^{ème} cas : $10^n = \underbrace{1\,000\dots0}_{n \text{ zéros}}$
- 3^{ème} cas : $10^{-n} = \underbrace{0,000\dots01}_{n \text{ zéros}}$. Le 1 est en n^{ème} position après la virgule

Exercice 15 : Calculer les nombres suivants :

$\frac{(10^4)^2 \times 10^{-2}}{10^4}$

20^3

$(-10)^3$

$0,00001 \times 1\,000\,000$

Cas particuliers de puissances de 10 à connaître :

$10^0 = 1$	$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$
<i>un</i>	<i>dix</i>	<i>cent</i>	<i>mille</i>

$10^4 = 10\,000$	$10^5 = 100\,000$	$10^6 = 1\,000\,000$	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
<i>dix – mille</i>	<i>cent – mille</i>	<i>un million</i>	<i>un milliard</i>

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$	$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$
<i>un dixième</i>	<i>un centième</i>	<i>un millième</i>

$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$	$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0,00001$	$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0,000001$
<i>un dix millième</i>	<i>un cent millième</i>	<i>un millionième</i>

4. Écriture ou notation scientifique d'un nombre

On peut écrire un même nombre sous plusieurs écritures.

Par exemple, on peut écrire $0,0035 = 3,5 \times 0,001 = 3,5 \times 10^{-3}$

De même $427 \times 10^5 = 4,27 \times 10^2 \times 10^5 = 4,27 \times 10^{5+2} = 4,27 \times 10^7$

Les dernières écritures obtenues $3,5 \times 10^{-3}$ ou $4,27 \times 10^7$ sont des **notations scientifiques**.

Définition : Tout nombre décimal peut s'écrire d'une manière unique sous la forme $\pm a \times 10^n$ où a est un nombre relatif compris entre 1 et 10 (10 exclus) et n est un entier relatif.

Exercice 16 : donner l'écriture scientifique de $A = \frac{48 \times (10^2)^5 \times 3 \times 10^{-9}}{160 \times 10^{-4}}$

IV. Opérations sur les fractions

1. Quotient de deux nombres

Définitions :

- $\frac{a}{b}$ (avec $b \neq 0$) est le quotient de a par b . On peut écrire $\frac{a}{b} = a : b$
- $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b est égal à a (avec $b \neq 0$)

2. Quotients égaux

Propriété : la valeur d'un quotient ne change pas si on multiplie ou si on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul (différent de zéro).

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a : k}{b : k} = \frac{a}{b} \quad \text{avec } k \neq 0$$

Exemples : $\frac{12}{15} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{4}{5}$ $\frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$ $\frac{1,56}{2,5} = \frac{156 : 100}{250 : 100} = \frac{156}{250}$

Propriété : un même nombre rationnel admet une infinité d'écritures fractionnaires toutes égales.

Exemple : $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{2,9}{5,8} = \frac{100}{200} \dots$

3. Fractions

Définition : Parmi toutes les écritures fractionnaires d'un même nombre, il en existe qu'on appelle fractions. Une fraction est un quotient dont le numérateur et le dénominateur sont des entiers.

Exemples : $\frac{19}{20}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{112}{14}$ sont des fractions

Méthode : Réduction de fractions au même dénominateur

Pour réduire deux fractions au même dénominateur, on détermine un multiple commun aux dénominateurs (le plus petit possible) puis on procède comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple : écrire les fractions $\frac{3}{15}$ et $\frac{7}{6}$ sous le même dénominateur.

Le plus petit multiple commun à 15 et à 6 est 30. On a alors $\frac{3}{15} = \frac{3 \times 2}{15 \times 2} = \frac{6}{30}$ et $\frac{7}{6} = \frac{7 \times 5}{6 \times 5} = \frac{35}{30}$.

Remarque : écrire deux fractions sous le même dénominateur permet notamment de les comparer.

Exercice 17 : Écrire les fractions suivantes sous le même dénominateurs

$$\frac{2}{3} \text{ et } \frac{8}{7}$$

$$\frac{-5}{8} \text{ et } \frac{7}{10}$$

$$\frac{11}{9} \text{ et } \frac{17}{5}$$

$$\frac{13}{2} \text{ et } -\frac{3}{11}$$

4. Comparaison de deux fractions**Propriétés :**

- Deux fractions écrites sous un même dénominateur positif sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs.
- Deux fractions positives écrites sous un même numérateur sont rangées dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs.

Exemples :

$$\frac{4}{5} < \frac{7}{5} \text{ car } 4 < 7$$

$$\frac{-8}{9} < \frac{-5}{9} \text{ car } -8 < -5$$

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{15} < \frac{21}{15} \text{ car } 20 < 21$$

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5} \text{ car } 3 < 5$$

$$\frac{5}{4} < \frac{5}{3} \text{ car } 4 > 3$$

$$\frac{11}{2} > \frac{11}{3} \text{ car } 2 < 3$$

5. Addition ou soustraction de fractions

Règle de calcul : Pour additionner ou soustraire des nombres en écritures fractionnaires :

- On les écrit sous le même dénominateur
- On additionne ou on soustrait les numérateurs et on garde le dénominateur commun

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Exercice 18 : calculer $A = \frac{3}{8} + \frac{1}{3}$ $B = \frac{3,1}{1,3} - \frac{0,5}{6,5}$ $C = \frac{7}{3} - \frac{5}{7}$ $D = \frac{11}{15} + \frac{2}{25} - \frac{1}{5}$

6. Multiplication de fractions

Règle de calcul : Pour multiplier deux quotients, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \text{ avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

Exemples : $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$

Très important : avant d'exécuter les produits des numérateurs et des dénominateurs, on cherche à décomposer les nombres en produits plus simples afin de simplifier les calculs.

Exemples : $\frac{15}{16} \times \frac{24}{25} = \frac{5 \times 3 \times 4 \times 6}{4 \times 4 \times 5 \times 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ $\frac{14}{33} \times \frac{55}{21} = \frac{2 \times 7 \times 5 \times 11}{3 \times 11 \times 7 \times 3} = \frac{10}{9}$

Exercice 19 : calculer $A = \frac{9}{8} \times \frac{16}{3}$ $B = \frac{39}{13} \times \frac{5}{65}$ $C = \frac{7}{3} \times \frac{-5}{7}$ $D = \frac{11}{-15} \times \frac{-25}{22} \times \frac{-1}{5}$

7. Division de fractions

Propriété : tout nombre non nul de la forme $\frac{a}{b}$ a pour inverse $\frac{b}{a}$

Règle de calcul : Diviser le nombre $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ par un nombre non nul $\frac{c}{d}$ avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$

revient à multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$ c'est à dire par $\frac{d}{c}$ autrement dit :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \text{ avec } b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0$$

Exercice 20 : calculer $\frac{-7}{3} : \frac{4}{5}$ puis $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}}$

V. Les racines carrées

1. Racine carrée d'un nombre positif

Définition : Soit a un nombre positif.

- Il existe un nombre **positif** dont le carré est égal à a .
Ce nombre se note \sqrt{a} et se lit « **racine carrée de a** ».
- On a donc **si $a \geq 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$**

Exemple : $\sqrt{13}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 13 donc $(\sqrt{13})^2 = 13$

Attention : la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas !

Exercice 21 : compléter $(\sqrt{8})^2 =$ $(\sqrt{5})^2 =$ $(\sqrt{\pi})^2 =$

2. Carré parfait

Définition : Un **carré parfait** est le carré d'un nombre entier

Exercice 22 : Déterminer les carrés parfaits inférieurs ou égaux à 100

3. Racine carrée d'un carré

Propriété : Pour tout nombre a , on a $\sqrt{a^2} = |a|$ c'est à dire $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a \leq 0$

Remarque : $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

Exercice 23 : Compléter

$$\sqrt{1,3^2} = \quad \sqrt{(-\pi)^2} = \quad \sqrt{(-3)^2} = \quad \sqrt{7,1^2} =$$

4. Opérations sur les racines carrées

Propriété : Pour tous nombres positifs a et b , on a

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{avec } b \neq 0$$

Démonstrations exigibles au programme notamment la première des deux

1. $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$ donc $(\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$
 Or $\sqrt{a \times b}$ est positif car c'est une racine carrée et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est aussi positif comme produit de deux racines carrées donc $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

2. $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \frac{a}{b}$ et $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$

Or $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est positif car c'est une racine carrée et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est aussi positif comme quotient de deux racines carrées donc $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ #

Exercice 24 : Calculer $A = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$ et $B = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{24}}$

Exercice 25 : Développer et réduire $C = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ et $D = (\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{11})$

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Contre exemple : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \neq 5$

Exercice 26 : Écrire $\sqrt{45}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers et b le plus petit possible.

Exercice 27 : Écrire $5\sqrt{2}$ sous la forme \sqrt{a} où a est un entier

Exercice 28 : Calculer $M = 5\sqrt{24} - 2\sqrt{54} + \sqrt{6}$ et $N = 6\sqrt{2} + \sqrt{18}$

VI. Les ensembles de nombres

1. Les nombres entiers naturels et relatifs

Définitions :

- Un **entier naturel** est un nombre appartenant à l'ensemble noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
- Un **entier relatif** est un nombre appartenant à l'ensemble noté $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
- Conventionnellement, un entier est un entier relatif sinon on précise entier naturel.

Remarque : la notation \mathbb{Z} provient de l'allemand « Zahlen » qui signifie « nombres »

Remarque : l'usage du \mathbb{Z} a été popularisé par le groupe de mathématiciens français Bourbaki au XX^{ème} siècle.

2. Les nombres décimaux et rationnels

Définition :

- un nombre **décimal** est un nombre de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

L'ensemble des nombres décimaux est noté $ID = \{ \frac{a}{10^n} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \}$

- un nombre **rationnel** est un nombre de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}, b \neq 0$

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}, b \neq 0 \}$

Exemples : $\frac{7}{10} \in ID$ et $\frac{7}{10} = 0,7$ et $\frac{1}{5} \in ID$ car $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

Propriété : $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

Démonstration exigible au programme :

On raisonne par l'absurde c'est à dire on va supposer que $\frac{1}{3}$ est décimal et arriver à une contradiction.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal alors il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \text{ donc } 10^n = 3 \times a \text{ donc } 3 \text{ est un diviseur de } 10^n.$$

Or $10^n = 1 \underbrace{000 \dots 0}_{n \text{ zéros}}$ donc la somme des chiffres de 10^n est égale à 1 qui n'est pas un multiple de 3 donc 10^n n'est pas divisible par 3 d'où la contradiction.

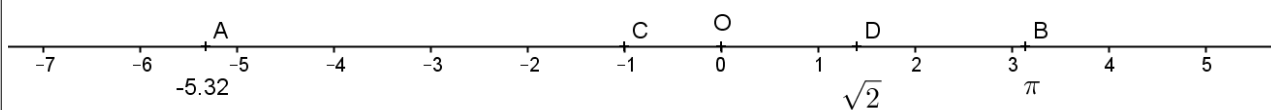
On déduit que l'hypothèse que $\frac{1}{3}$ est décimal est fautive donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal #

3. Les nombres réels

Définition : Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.

On peut repérer tout point de cette droite par un nombre appelé son abscisse.

L'ensemble de toutes les abscisses constitue l'ensemble des **nombres réels** noté \mathbb{R}



Remarque : on parle de nombres réels ou plus simplement de réels.

Propriété : Il existe des nombres qui ne sont pas des nombres rationnels comme $\sqrt{2}$ par exemple.

Démonstration exigible au programme :

Nous allons raisonner par l'absurde c'est à dire on va supposer que $\sqrt{2}$ est un quotient.

Il existe donc deux entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\frac{a}{b}$ irréductible .

On déduit que :

$$\sqrt{2} \times b = a \text{ donc } 2 \times b^2 = a^2 \text{ donc } a^2 \text{ est pair donc } a \text{ est pair donc } a = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N}$$

On déduit que $2b^2 = (2p)^2 = 4p^2$ donc $b^2 = 2p^2$ donc b^2 est pair donc b est pair

On déduit que a et b sont pairs donc tous les deux divisibles par 2 ce qui contredit que la fraction

$\frac{a}{b}$ est irréductible donc l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est un rationnel est fausse. #

Définition : Un nombre réel qui n'est pas un nombre rationnel est appelé un nombre irrationnel

Exemples : $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \pi$ sont des nombres irrationnels.

Propriété :

- Tout entier naturel est un entier relatif et relatif
- Tout entier relatif est un nombre décimal
- Tout nombre décimal est un nombre rationnel
- Tout nombre rationnel est un nombre réel

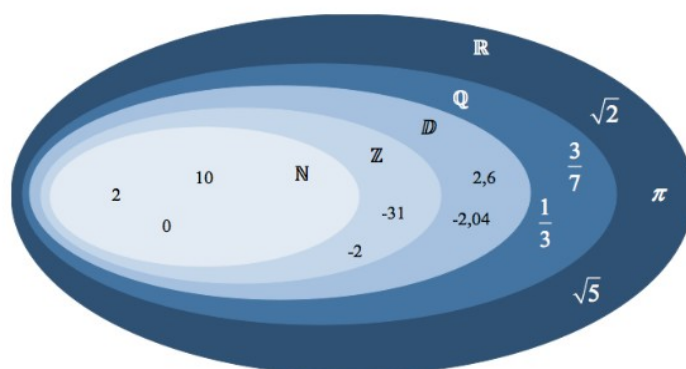
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Démonstration :

- L'ensemble des entiers relatifs est composé de tous les entiers naturels et de leurs opposés donc tout entier naturel est un entier relatif donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- Soit $a \in \mathbb{Z}$. On peut écrire $a = \frac{a}{10^0}$ donc a est un nombre décimal donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$
- Soit $a \in \mathbb{D}$ donc $a = \frac{b}{10^n}$ avec $b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ donc a est un nombre rationnel donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
- Les nombres réels étant l'ensemble de toutes les abscisses d'un axe gradué, on déduit que tout nombre rationnel (et irrationnel) est un nombre réel

Conclusion : on a bien démontré que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

#



Exercice 29 :

A l'aide des lettres **N**; **Z**; **D**; **Q** et **R** compléter :

$10^{-4} \in \dots$	$4\sqrt{2} \in \dots$	$852 \in \dots$	$0,0002 \times 10^6 \in \dots$
$\sqrt{49} \in \dots$	$\frac{\pi}{4} \in \dots$	$-\sqrt{\frac{9}{4}} \in \dots$	$\frac{184}{12} \in \dots$

Propriété : Pour tout nombre réel x il existe un nombre décimal d et un entier naturel n tels que $d \leq x < d + 10^{-n}$. On obtient un encadrement décimal du le réel x à 10^{-n} près.

Exemple : $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$ est un encadrement décimal de $\sqrt{2}$.